Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2020-2021

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu $n°3$ - 22 mars 2021 - Durée: 45 minutes

L'épreuve se compose de 3 exercices indépendants.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. ($3,5$ *points.*)

1) Une plaque d'un matériau homogène a la forme du domaine $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la plaque.

2) Un solide a la forme d'un cube unité $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. La densité volumique ρ du matériau est proportionelle au carré de la distance du point à l'origine: $\rho(x, y, , z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$ avec $k > 0$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du solide.

Exercice 2. ($3,5$ *points.*)

1) Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $df = (3 + 2xy)dx + (x^2 - 3y^2)dy$.

2) Calculer $\displaystyle\int_\gamma xyzdx + xzdy + xydz$ où $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

Exercice 3. (3 *points.*) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0, 0)\}$ on pose:
$\vec{V}(x, y, z) = -\dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \left(\dfrac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$ et
$f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

1) Montrer que $\vec{V} = \overrightarrow{grad} f$.

2) Calculer le travail de $\vec{V}$ le long de la courbe $\gamma(t) = (1 + t, t^3, t\cos(\pi t))$ où $t \in [0, 1]$.

Question bonus (+1 point): Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\oint_\Delta (y - \sin(x))\, dx + (\cos(y) - x)\, dy$ où Δ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 2)$ (orienté dans le sens direct).