Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2020-2021

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Corrigé du contrôle continu $n°3$ - 22 mars 2021 -

Exercice 1. (4 *points.*)

1) Une plaque d'un matériau homogène a la forme du domaine $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la plaque.

On a $Aire(D) = \iint_D dxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin(x)} dy\right) dx = \int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2.$

$2x_G = \iint_D xdxdy = \int_0^\pi x(\int_0^{\sin(x)} dy)dx = \int_0^\pi x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)dx$

$= [-x\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$ d'où $\boxed{x_G = \dfrac{\pi}{2}}$.

Remarque 0.1 *Par symétrie, x_G est le milieu du segment $[0, \pi]$ i.e. $x_G = \frac{\pi}{2}$.*

$2y_G = \iint_D ydxdy = \int_0^\pi (\int_0^{\sin(x)} ydy)dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{2}dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{4}dx = \frac{\pi}{4}$ d'où $\boxed{y_G = \dfrac{\pi}{8}}$. Ainsi,

$$\boxed{G = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)}$$

2) Un solide a la forme d'un cube unité $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. La densité volumique ρ du matériau est proportionelle au carré de la distance du point à l'origine: $\rho(x, y, , z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$ avec $k > 0$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du solide.

On a la masse de $C = \iiint_C k(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = k \iiint_C (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = k \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + (y^2 + z^2)x\right]_0^1 dydz = k \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + (y^2 + z^2)\right) dydz$

$= k \int_0^1 \left[(\frac{1}{3} + z^2)y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dz = k \left[\frac{2z}{3} + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{k}$.

$x_G = \dfrac{1}{k} \iiint_C k(x^2+y^2+z^2)xdxdydz = \iiint_C (x^2+y^2+z^2)xdxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} + (y^2 + z^2)\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dydz$
$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right) dydz = \int_0^1 \left[(\frac{1}{4} + \frac{z^2}{2})y + \frac{y^3}{6}\right]_0^1 dz = \int_0^1 \left[\frac{5}{12} + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 dz = \left[\frac{5z}{12} + \frac{z^3}{6}\right]_0^1 = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \boxed{\dfrac{7}{12}}$. Par symétrie, $y_G = z_G = x_G = \boxed{\dfrac{7}{12}}$, d'où $\boxed{G = \left(\dfrac{7}{12}, \dfrac{7}{12}, \dfrac{7}{12}\right).}$

Exercice 2. (3,5 *points.*)

1) On doit avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3 + 2xy \implies f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$ puis $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$, entraîne $g'(y) = -3y^2$, par suite on peut prendre $g(y) = \int -3y^2dy = -y^3$. Ainsi $\boxed{f(x, y) = 3x + x^2y - y^3}$ convient.

2) On a le long de γ, $(x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, t^3)$, d'où $dx = dt$, $dy = 2tdt$ et $dz = 3t^2dt$, ainsi

$$\int_\gamma xyzdx + xzdy + xydz = \int_0^1 (t^6 + 2t^5 + 3t^5)dt = \left[\frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^6}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{6 + 14 + 21}{42} = \boxed{\frac{41}{42}}.$$

Exercice 3. (3 *points.*)

1) Il s'agit de montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.
On va utiliser la formule (de la dérivée d'une fonction composée) $(u^\alpha)'(t) = \alpha u'(t) u^{\alpha-1}(t)$.
On commence par calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on a $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = u^\alpha(x)$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u(x) = x^2+y^2+z^2$ alors $u'(x) = 2x$, et la formule nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Par symétrie, en échangeant les rôles de x et y, puis les rôles de x et z, en obtient

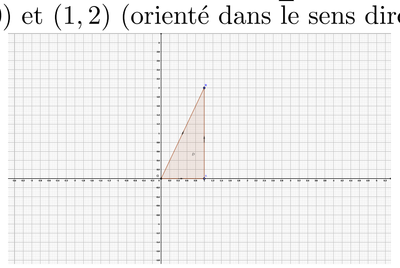
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

On a ainsi montré que $\vec{V} = \overrightarrow{grad} f$.

2) Comme $\vec{V} = \overrightarrow{grad} f$ alors le travail de $\vec{V}$ le long de la courbe γ est égal à

$$\int_\gamma \vec{V} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(2,1,\cos(\pi)) - f(1,0,0)) = f(2,1,-1) - f(1,0,0))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} - 1}.$$

Question bonus (+1 point): Calculer l'intégrale curviligne $\oint_\Delta (y - \sin(x))\,dx + (\cos(y) - x)\,dy$ où Δ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,2)$ (orienté dans le sens direct).

On note par D le domaine délimité Δ.  D'après, la formule de Green-Riemann,

$$\oint_\Delta (y - \sin(x))\,dx + (\cos(y) - x)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial(\cos(y) - x)}{\partial x} - \frac{\partial(y - \sin(x))}{\partial y} \right) dxdy = -2 \iint_D dxdy = -2Aire(D)$$

D'autre part, l'aire de D est égale à $\frac{1}{2} \times OA \times AB = 1$, ainsi

$$\boxed{\oint_\Delta (y - \sin(x))\,dx + (\cos(y) - x)\,dy = -2}.$$

Remarque 0.2 *On peut aussi calculer cette intégrale directement: on note* $\omega = (y - \sin(x))\,dx + (\cos(y) - x)\,dy$, $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ *et* $B = (1,2)$. *L'arc* $\Delta = [O,A] \cup [A,B] \cup [B,O]$ *et on a les paramétrages suivants:*

$$\begin{cases} [O,A] : O + t(A - O) = t(1,0) = (t,0) \text{ avec } t \in [0,1] \implies dx = dt \text{ et } dy = 0 \\ [A,B] : A + t(B - A) = (1,0) + t((1,2) - (1,0)) = (1,2t) \text{ avec } t \in [0,1] \implies dx = 0 \text{ et } dy = 2dt \\ [B,O] : B + t(O - B) = (1,2) + t(-1,-2) = (1-t, 2-2t) \text{ avec } t \in [0,1] \implies dx = -dt \text{ et } dy = -2dt \end{cases}$$

Finalement, $\oint_\Delta (y - \sin(x))\,dx + (\cos(y) - x)\,dy = \int_{[O,A]} \omega + \int_{[A,B]} \omega + \int_{[B,O]} \omega =$

$$\int_0^1 -\sin(t)dt + \int_0^1 2(\cos(2t) - 1)dt - \int_0^1 (((2-2t) - \sin(1-t)) + (2\cos(2-2t) - 2(1-t)))\,dt$$
$$= -\int_0^1 \sin(t)dt + \int_0^1 (2\cos(2t) - 2)dt + \int_0^1 (\sin(1-t) - 2\cos(2-2t))dt = [\cos(t) + \sin(2t) - 2t + \cos(1-t) + \sin(2-2t)]_0^1$$
$$= (\cos(1) + \sin(2) - 2 + \cos(0) + \sin(0)) - (\cos(0) + \sin(0) - 0 + \cos(1) + \sin(2)) = \boxed{-2}.$$