Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2020-2021

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu $n°2$ - 8 mars 2021 - Durée: 45 minutes

L'épreuve se compose de 3 exercices indépendants.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3 *points.*) Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\iiint_D x^2yz\ dxdydz$ où $D = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

2) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} \left(\int_0^y e^x(2y+2z)\ dz \right) dy \right) dx.$

Exercice 2. (3,5 *points.*) Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ et } 1-x^2-y^2 \leqslant z \leqslant 4\}$.

1) Montrer qu'en coordonnées cylindriques, D est décrit par $\{(r,\theta,z) \mid \theta \in [0,2\pi],\ r \in [0,1] \text{ et } 1-r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$.

2) Calculer le volume de D (on pourra utiliser les coordonnées cylindriques).

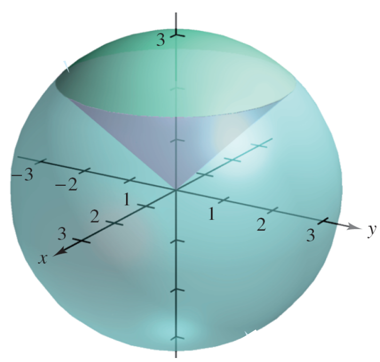
3) Montrer que $\displaystyle\iiint_D (xe^y+3)dxdydz$ est égale à 3 fois le volume de D.

Exercice 3. (3,5 *points.*)

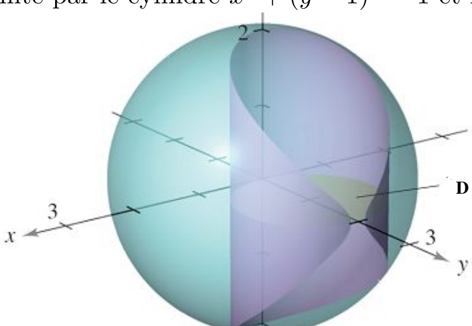
1) Calculer $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^4 \cos(\varphi)\ dr \right) d\varphi \right) d\theta.$

2) En utilisant les coordonnées sphériques, montrer que $\displaystyle I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$

où Ω est le solide limité par le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et la sphère $x^2+y^2+z^2 = 9$.



Question bonus (+1 point): Déterminer, en utilisant les coordonnées cylindriques, le volume du solide Ω délimité par le cylindre $x^2+(y-1)^2 = 1$ et la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$.



le disque **D** est la projection de Ω sur xOy.

(on pourra montrer que la condition $x^2+(y-1)^2 \leqslant 1$ se traduit par $0 \leqslant r \leqslant 2\sin(\theta)$ et $\theta \in [0,\pi]$).