Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2020-2021

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Corrigé du contrôle continu $n°2$

Exercice 1. (3 *points.*)

1) $\iiint_D x^2yz\ dxdydz = \int_0^1 x^2dx \int_0^2 ydy \int_0^3 zdz = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \times \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{9}{2} = \boxed{3}$

2) $\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} \left(\int_0^y e^x(2y+2z)\ dz\right) dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} \left[e^x(2yz+z^2)\right]_0^y dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} e^x(2y^2+y^2)dy\right) dx =$
$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} 3y^2e^xdy\right) dx = \int_0^2 \left[y^3e^x\right]_0^{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^2 xe^xdx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^xdx = 2e^2 - (e^2-1) = \boxed{e^2+1}$

Exercice 2. (3, 5 *points.*)

1) En coordonnées cylindriques, les conditions $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 1-(x^2+y^2) \leqslant z \leqslant 4 \end{cases}$ se traduisent par $\begin{cases} r^2 = (r\cos\theta^2) + (r\cos\theta^2) \leqslant 1 \\ 1-r^2 = 1-r^2 \leqslant z \leqslant 4 \end{cases}$
ou encore $\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1-r^2 = 1-r^2 \leqslant z \leqslant 4. \end{cases}$ Il n'y a pas de condition sur l'angle θ, se traduit par " θ parcourt un intervalle de longueur 2π", par exemple $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
Ainsi, D est décrit par $\{(r,\theta,z)\,|\,\theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,1] \text{ et } 1-r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$.

2) $Vol(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_{\{(r,\theta,z)\,|\,\theta\in[0,2\pi],\, r\in[0,1] \text{ et } 1-r^2\leqslant z\leqslant 4\}} rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_{1-r^2}^4 dz\right) rdr$
$= [\theta]_0^{2\pi} \times \int_0^1 [z]_{1-r^2}^4\, rdr = 2\pi \int_0^1 (4-(1-r^2))rdr = 2\pi \int_0^1 (3r+r^3)dr = 2\pi \left[\frac{3r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right) =$
$\boxed{\frac{7\pi}{2}}$.

3) Par symétrie, $\iiint_D xe^ydxdydz = 0$ d'où $\iiint_D (xe^y+3)dxdydz = 3\iiint_D dxdydz = 3Vol(D)$.

Remarque 0.1 *Plus de détails, le domaine D est symétrique par rapport x (c-à-d qu'il est égal à son image par la transformation $h : (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$) et la fonction $f(x,y,z) = xe^y$ est impaire par rapport à x ($f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$), alors, par le théorème de changement de variables,* $\iiint_D xe^ydxdydz = -\iiint_D xe^ydxdydz$, *d'où* $\iiint_D xe^ydxdydz = 0$.
Ainsi, $\iiint_D (xe^y+3)dxdydz = \iiint_D xe^ydxdydz + 3\iiint_D dxdydz = 0 + 3Vol(D) = 3Vol(D)$.

Exercice 3. (3, 5 *points.*)

1) $I = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^4\cos(\varphi)\ dr\right) d\varphi\right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)d\varphi \times \int_0^3 r^4dr$
$= [\theta]_0^{2\pi} \times [\sin(\varphi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3 = 2\pi \times (1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{3^5}{5} = \boxed{\frac{3^5\pi(2-\sqrt{2})}{5}}$

2) En coordonnées sphériques $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z = r\sin(\varphi), \end{cases}$ la condition $x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$ se traduit par $0 \leqslant r \leqslant 3$.

La condition $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z$ se traduit par $0 \leqslant r\cos(\varphi) \leqslant r\sin(\varphi) \implies \begin{cases} \cos(\varphi) \leqslant \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) \geqslant 0 \end{cases} \implies \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et aucune condition sur θ ce traduit par $\theta \in [0, 2\pi]$.
Ainsi, Ω est décrit en coordonnées sphériques

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi) \,|\, \theta \in [0,2\pi],\, \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}],\, r \in [0,3]\} = [0,3] \times [0,2\pi] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], \text{ d'où}$$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint_{[0,3]\times[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]} r^2(r^2\cos(\varphi))drd\theta d\varphi = \iiint_{[0,3]\times[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]} r^4\cos(\varphi)drd\theta d\varphi = I.$$

Remarque 0.2 *Si utiliser les coordonées sphériques "rayon-longitude-colatitude"* $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$, *$dxdydz = r^2\sin(\varphi)drd\theta d\varphi$ et $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et I s'écrit* $I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^3 r^4\sin(\varphi)\, dr\right)d\varphi\right)d\theta.$

Question bonus (+1 point): Déterminer, en utilisant les coordonnées cylindriques, le volume du solide Ω délimité par le cylindre $x^2+(y-1)^2 = 1$ et la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$.
Comme $x^2+y^2+z^2 = r^2+z^2 = 4$, alors les bornes sur z sont $-\sqrt{4-r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-r^2}$, $x^2+(y-1)^2 \leqslant 1 \iff x^2+y^2-2y+1 \leqslant 1 \iff x^2+y^2 \leqslant 2y \iff r^2 \leqslant 2rsin\theta$, d'où pour $r>0$, $r \leqslant 2\sin\theta \implies \sin\theta \geqslant 0 \implies \theta \in [0,\pi]$. Ainsi en cordonnées cylindriques Ω est décrit par
$\{(r,\theta,z) \,|\, \theta \in [0,\pi],\, 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta,\, -\sqrt{4-r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-r^2}\}$. Alors

$$Vol(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\sin\theta} r\left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dz\right)dr\right)d\theta = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\sin\theta} r\,[z]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}\,dr\right)d\theta = \int_0^\pi\left[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\pi\left(8-(4-4\sin\theta^2)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^\pi\left(8-8(1-\sin\theta^2)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^\pi\left(8-8(\cos\theta^2)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta = \frac{16}{3}\int_0^\pi\left(1-|\cos\theta|^3\right)d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^3\theta\right)d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\theta+\cos\theta\sin^2\theta\right)d\theta = \frac{32}{3}\left[\theta-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{16}{9}(3\pi-4)}$$