Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2020-2021

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Corrigé CC1

Exercice 1.

1) $I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^y x^2\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^3}{3} dy = \left[\frac{y^4}{12} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{12}}$

2) $I_2 = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{1+y} (2y+3x^2)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[2xy + x^3 \right]_{1-y}^{1+y} dy$

$= \int_0^1 \left(2y((1+y)-(1-y)) + ((1+y)^3 - (1-y)^3) \right) dy = \int_0^1 \left(4y^2 + 2y^3 + 6y \right) dy$

$= \left[\frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^4 + 3y^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 3 = \boxed{\frac{29}{6}}$

Remarque: On peut aussi, sans développer $(1+y)^3 - (1-y)^3$, calculer l'intégrale en utilisant les primitives de $(1+y)^3$ et $(1-y)^3$:

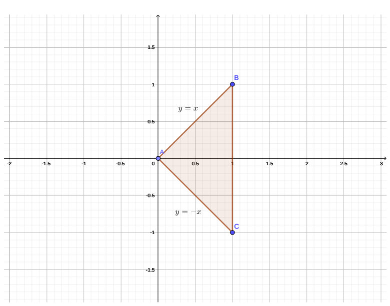
$I_1 = \int_0^1 \left(2y((1+y)-(1-y)) + ((1+y)^3 - (1-y)^3) \right) dy = \int_0^1 \left(4y^2 + (1+y)^3 - (1-y)^3 \right) dy$

$= \left[\frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}(1+y)^4 + \frac{1}{4}(1-y)^4 \right]_0^1 = (\frac{4}{3} + \frac{2^4}{4}) - (0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{4}{3} + 4 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{29}{6}}$

3) $I_3 = \int_0^1 \left(\int_0^x -\sin(x^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[-y\sin(x^2) \right] dx$

$= -\int_0^1 x\sin(x^2) dx = \left[\frac{\cos(x^2)}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\cos(1)-1}{2}}$

Exercice 2. Soit D le triangle de sommets $(0,0), (1,1)$ et $(1,-1)$.

1) 

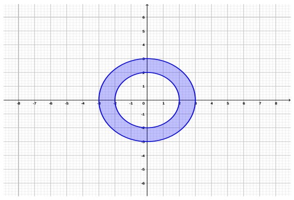
2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ -x \leqslant y \leqslant x\}$

3) $I = \iint_D e^{2x+2y}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^x e^{2x+2y}\, dy \right) dx = \int_0^1 e^{2x} \left(\int_{-x}^x e^{2y}\, dy \right) dx$

$= \int_0^1 e^{2x} \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_{-x}^x dx = \int_0^1 e^{2x} \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{4x} - 1}{2} \right) dx = \left[\frac{e^{4x}}{8} - \frac{x}{2} \right]_0^1$

$= \boxed{\frac{e^4 - 1}{8} - \frac{1}{2}}.$

Exercice 3. (3,5 *points.*) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

1) 

2) $\text{Aire}(D) = \text{Aire du disque de rayon } 3 - \text{Aire du disque de rayon } 2 = 9\pi - 4\pi = \boxed{5\pi}$.

Autre méthode: en coordonnées polaires $D = \{(r,\theta), \,|\, \theta \in [0,2\pi],\ 4 \leqslant r^2 \leqslant 9\} = [2,3] \times [0,2\pi]$, d'où

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdx = \iint_{[2,3]\times[0,2\pi]} r dr d\theta = \int_2^3 r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^3 \times [\theta]_0^{2\pi} = \boxed{5\pi}.$$

3) $$\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \iint_{[2,3]\times[0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta = \int_2^3 \frac{r}{1+r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_2^3 \times [\theta]_0^{2\pi} = \pi \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \boxed{\pi \ln(2)}.$$

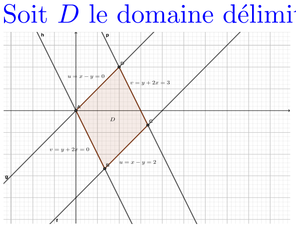
Question bonus (+1 point):

i) Calculer le jacobien du changement de variables $x = \frac{1}{3}(u+v)$ et $y = \frac{1}{3}(v-2u)$.

$$Jac_h(u,\ v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}(u,\ v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d'où le jacobien est égal à $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.

ii) Soit D le domaine délimité par les droites $y = x-2$, $y = x$, $y = -2x$ et $y = -2x+3$.



Puisque $0 \leqslant u = x - y \leqslant 2$ et $0 \leqslant v = y + 2x \leqslant 3$, dans les coordonnées (u,v): $D = [0,2] \times [0,3]$.

Ainsi, le théorème de changement de variables nous donne:

$$\iint_D (2x+y)^2 dxdy = \iint_{[0,2]\times[0,3]} v^2 \left|\frac{1}{3}\right| dudv = \frac{1}{3}\int_0^2 du \int_0^3 v^2 dv$$

$$= \frac{1}{3} \times [u]_0^2 \times \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3^3}{3} = \boxed{6}.$$