Nom et Prénom:	Groupe:

Licence L2 PCGS 2019–2020

Unité d'enseignement OM4

CC3 - mai 2020.
Comme toujours, en mathématiques, vos réponses doivent être justifiées. Bon courage.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt.$
2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)dt.$
3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt.$

Exercice 2

Pour les intégrales données ci-dessous, dessiner le domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^2$ (la fonction f est une fonction continue dans ce domaine). Reécrire ces intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration des variables :

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,\ y)dy\right) dx\ ,$$

$$J = \int_0^2 \left(\int_{x-1}^{3-x} f(x,\ y)dy\right) dx\ ,$$

$$K = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)dy\right) dx.$$

Exercice 3

Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$.

1) Déterminer les points d'intersection de ces deux courbes.
2) Dessiner le domaine D.
3) Calculer l'aire de D.
4) Calculer l'intégrale double $\iint_D (y-x)dxdy$.

Soient C le bord de D orienté dans le sens direct et $I = \int_C y^2 dx$.

5) Calculer I en utilisant une paramétrisation de C.
6) Calculer I en utilisant une intégrale double sur D.

Exercice 4

Soit le solide homogène

$$B := \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$$

B est le domaine enfermé entre les sphères d'équations $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+y^2+z^2=4$ dans le premier octant (la où les trois coordonnées sont positives i.e. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$).

1) Calculer le volume de B par une méthode de votre choix.
2) Calculer l'abscisse x_G du centre de gravité de B. En déduire (sans calcul) les coordonnées du centre de gravité.

3) Calculer l'intégrale triple $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$.

Exercice 5

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V} = (y^2\cos x + z^3)\ \vec{i} + (2y\sin x - 4)\ \vec{j} + (3xz^2+2)\ \vec{k}$

1) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ et $\mathrm{div}\,\vec{V}$.

2) Existe-t-il une fonction f sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\overrightarrow{grad} f = \vec{V}$? Si oui déterminer une telle f.

3) Soit γ la courbe paramétrée par $x = \cos(2\pi t),\ y = t^3 - t,\ z = e^{2t} - e^{2t^2},\ t \in [0,1]$.
La courbe γ est-t-elle fermée ?

4) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe γ.

5) Déterminer la circulation de $\vec{V}$ le long des courbes C joignant le point $(0,0,0)$ au point $(\pi,1,2)$.

Exercice Bonus :

A) On considère le domaine de $\mathbb{R}^3$: $\Omega := \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2+y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 4\}$.

1) *Déterminer un paramétrage de la surface* $S := \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2+y^2 = z^2, 0 \leqslant z \leqslant 4\}$ et calculer son aire.

2) On considère le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x,\ y,\ z) = (0,\ x+5y,\ z)$.

a) Calculer le flux de ce champ de vecteurs à travers le bord de Ω (orienté par le vecteur normal sortant).

b) *A quelle intégrale triple ce flux est-il égal ? Calculer cette intégrale triple et retrouver de cette manière le résultat de la question* a).

B) 1) Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$(i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, \qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n, \qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} x^n.$

2) Soit $R \geqslant 0$ et $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$?

3) Montrer que $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+2)}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+2)}$.