Licence L2 PCGI 2019–2020

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Unité d'enseignement OM4

Corrigé du CC3.

Exercice 1

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt.$

   Solution: $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(-\cos(\pi)+\cos(0)) = \frac{1}{2}(1+1) = \boxed{1}.$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)dt.$

   Solution: On va utiliser une intégration par parties, on pose $\begin{cases} u = t \\ v' = \cos(2t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{\sin(2t)}{2}, \end{cases}$ d'où

   $I_2 = \left[\dfrac{t\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\sin(\pi) - 0\sin(0)) - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt.$

   Solution: Des relations $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ et $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, on obtient $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ puis $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$. Alors,

   $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)dt = \frac{1}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

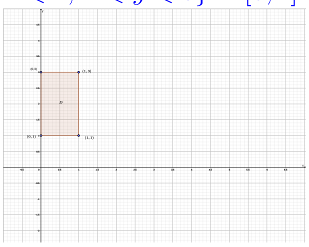
   $= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}(0-0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$

Exercice 2

Pour les intégrales données ci-dessous, dessiner le domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^2$ (la fonction f est une fonction continue dans ce domaine). Reécrire ces intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration des variables :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,\ y)dy\right)dx.$

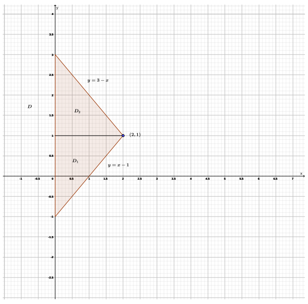
Solution: Le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\} = [0,1] \times [1,3]$ d'intégration est un rectangle représenté sur la figure suivante :



D'après le théorème de Fubin, l'interversion des variables d'intégration se lit :

$I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,\ y)dy\right)dx = \int_1^3 \left(\int_0^1 f(x,\ y)dx\right)dy.$

2) $J = \displaystyle\int_0^2 \left(\int_{x-1}^{3-x} f(x,y)dy\right)dx.$

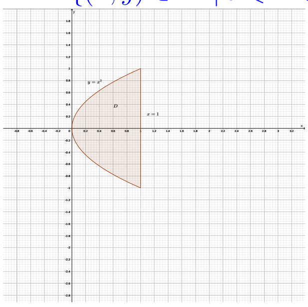
Solution: Le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x-1 \leqslant y \leqslant 3-x\}$ d'intégration est représenté sur la figure suivante :  D s'écrit comme domaine de type II (par tranches horizontales) :$D = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant y+1\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant y \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 3-y\}$

L'interversion des variables d'intégration se lit donc :

$$J = \int_0^2 (\int_{x-1}^{3-x} f(x,\ y)dy)dx \ = \ \int_{-1}^{1} (\int_0^{y+1} f(x,y)dx)dy + \int_1^3 (\int_0^{3-y} f(x,\ y)dx)dy.$$

3) $K = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)dy \right) dx.$

Solution: Le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$ d'intégration est représenté



sur la figure suivante :

D s'écrit comme domaine de type II (par tranches horizontales) :$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant y^2\}$ L'interversion des variables d'intégration se lit donc :

$$K = \int_0^1 (\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)dy)dx \ = \ \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} f(x,\ y)dx)dy = 2\int_0^1 (\int_{y^2}^{1} f(x,\ y)dx)dy$$

Exercice 3

Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$.

1) Déterminer les points d'intersection de ces deux courbes.
2) Dessiner le domaine D.
3) Calculer l'aire de D.
4) Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (y-x)dxdy$.

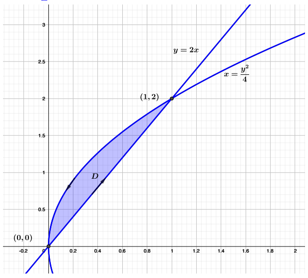
   Soient C le bord de D orienté dans le sens direct et $I = \displaystyle\int_C y^2 dx$.

5) Calculer I en utilisant une paramétrisation de C.
6) Calculer I en utilisant une intégrale double sur D.

Solution:

1) Ces points sont déterminés par les équations $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$, qui impliquent $y^2 = 2y$; donc $y = 0$ ou 2. Il y a deux points $(0,0)$ et $(1,\ 2)$.

2) La première courbe est une parabole, la seconde est une droite. Les deux passent par $(0,0)$ et $(1,2)$.



3) L'aire de D est $\iint_D dxdy$. D'après le théorème de Fubini, on a
aire $(D) = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} dx \right) = \int_0^2 (\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}) dy = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} \right]_0^2 = \boxed{\frac{1}{3}}$.

4) D'après le théorème de Fubini, on a

$$\iint_D (y-x)dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} (y-x)dx \right) dy = \int_0^2 (\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{4} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{32}) dy$$

$$= \int_0^2 (\frac{3y^2}{8} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^4}{32}) dy = \left[\frac{y^3}{8} - \frac{y^4}{16} + \frac{y^5}{160} \right]_0^2 = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

5) La courbe C est la réunion d'un segment paramétré par $x = x, y = 2x$ et x variant de 0 à 1, et d'un arc parabolique paramétré par $x = \frac{y^2}{4}$, $y = y$ et y variant de 2 à 0. Donc l'intégrale est égale à

$$\int_0^1 4x^2 dx + \int_2^0 y^2 d(\frac{y^2}{4}) = \frac{4}{3} - \int_0^2 (\frac{y^3}{2}) dy = \frac{4}{3} - \left[\frac{y^4}{8} \right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

6) D'après la formule de Green-Riemann et le théorème de Fubini, cette intégrale est égale à

$$= -\iint_D 2ydxdy = -\int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} 2ydx \right) dy$$

$$= -\int_0^2 (y^2 - \frac{y^3}{2}) dy = -\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right]_0^2 = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

Exercice 4

Soit le solide homogène

$$B := \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\, 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$$

B est le domaine enfermé entre les sphères d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dans le premier octant (la où les trois coordonnées sont positives i.e. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$).

1) Calculer le volume de B par une méthode de votre choix.

Solution: $Vol(B) = \frac{1}{8}(Vol(\text{boule de rayon } 2) - Vol(\text{boule de rayon } 1)) = \frac{1}{8}(\frac{4\pi}{3}(2^3 - 1^3) = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$.

On peut aussi effectue un changement de variables en coordonnées sphériques. On a les formules :

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ z = \rho \sin\varphi.$$

Le module du jacobien du changement de variables $(\rho,\ \theta,\ \varphi) \mapsto (\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$ vaut $\rho^2\cos\varphi$. Le domaine d'intégration en coordonnées sphériques est :

$$\{(\rho,\ \theta,\ \varphi); 1 \leqslant \rho \leqslant 2,\ \theta \in [0,\ \frac{\pi}{2}],\ \varphi \in [0,\ \frac{\pi}{2}]\}.$$

Alors, le volume de B est égal

$$Vol(B) = \iiint_B dxdydz = \int_{\rho\in[1,2]} \int_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

On utilise ensuite le théorème de Fubini, on aura

$$Vol(B) = \int_1^2 \rho^2 d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \times \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 \times [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7}{3} \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \boxed{\frac{7\pi}{6}}.$$

2) Calculer l'abscisse x_G du centre de gravité de B. En déduire (sans calcul) les coordonnées du centre de gravité.

Solution: Comme B est homogène, $x_G = \frac{1}{Vol(B)} \iiint_B xdxdydz$.

On effectue aussi un changement de variables en coordonnées sphériques.

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$x_G = \frac{1}{Vol(B)} \int_{\rho\in[1,2]} \int_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]} \rho^3 \cos\theta (\cos\varphi)^2 d\rho d\theta d\varphi$$

On utilise ensuite le théorème de Fubini :

$$= \frac{1}{Vol(B)} \int_1^2 \rho^3 d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{Vol(B)} \times \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \times [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} d\varphi$$

$$= \frac{6}{7\pi} \times \frac{15}{4} \times 1 \times \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{45}{56}}.$$

Le rôle des variables x, y et z est interchangeable dans la définition du domaine, c-à-d que le domaine B est invariant par les symétries données par les applications
$(x,y,z) \mapsto (y,x,z)$, $(x,y,z) \mapsto (z,y,x)$ et $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$; ainsi,
$y_G = z_G = x_G = \frac{45}{56}$, d'où le centre de gravité de B est le point $G = (\frac{45}{56}, \frac{45}{56}, \frac{45}{56})$.

3) Calculer l'intégrale triple $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$.

Solution: On effectue le changement de variables en coordonnées sphériques. L'intégrale à calculer vaut donc :
$I = \iiint_B \sqrt{x^2+y^2} dxdydz = \int_{\rho\in[1,2]} \int_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]} \rho^3 (\cos\varphi)^2 d\rho d\theta d\varphi.$
On utilise ensuite le théorème de Fubini :

$$I = \int_1^2 \rho^3 d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \times \frac{\pi}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} d\varphi$$

$$= \frac{15}{4} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{15\pi^2}{32}}.$$

Exercice 5

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V} = (y^2\cos x + z^3)\,\vec{i} + (2y\sin x - 4)\,\vec{j} + (3xz^2 + 2)\,\vec{k}$

1) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ et $\text{div}\,\vec{V}$.

2) Existe-t-il une fonction f sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\overrightarrow{grad} f = \vec{V}$? Si oui déterminer une telle f.

3) Soit γ la courbe paramétrée par $x = \cos(2\pi t),\ y = t^3 - t,\ z = e^{2t} - e^{2t^2},\ t \in [0,1]$.
La courbe γ est-t-elle fermée ?

4) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe γ.

5) Déterminer la circulation de $\vec{V}$ le long des courbes C joignant le point $(0,0,0)$ au point $(\pi,1,2)$.

Solution:

1) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$. On a $\text{div}\,\vec{V} = -y^2\sin x + 2\sin x + 6xz$.

2) Oui. On a $f(x,y,z) = y^2\sin x + xz^3 - 4y + 2z +$ constante. On a $\overrightarrow{grad}f = \vec{V}$.

3) Oui. Quand $t=0$ et $t=1$ on obtient le même point.

4) La circulation est égale à 0 car $\vec{V}$ est un champ de gradients et γ est fermée.

5) Elle est égale à $f(\pi,1,2) - f(0,0,0) = 8\pi$.

Exercice Bonus :

A) On considère le domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par $\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leqslant z^2, 0\leqslant z\leqslant 4\}$.

1) *Déterminer un paramétrage de la surface* $S := \{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = z^2, 0\leqslant z\leqslant 4\}$ et calculer son aire.

Solution: On remarque qu'en coordonnées polaires, on a $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$, ainsi un paramétrage de la surface est donné par $s(r,\ \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ avec $(r,\theta)\in D = [0,4]\times[0,2\pi]$.

Le vecteur normal est

$$\vec{n}(r,\theta) = \frac{\partial s}{\partial r}(r,\ \theta)\wedge\frac{\partial s}{\partial \theta}(r,\ \theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r\cos\theta\\ -r\sin\theta\\ r\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{n}(r,\theta)\| = \sqrt{(-r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2 + r^2} = \sqrt{2}r$$

Par suite, $Aire(S) = \iint_D dA = \int_0^4\int_0^{2\pi}\|\vec{n}(r,\theta)\|drd\theta = \int_0^4\int_0^{2\pi}\sqrt{2}rdrd\theta = \sqrt{2}\int_0^4 rdr\int_0^{2\pi}d\theta = \sqrt{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^4[\theta]_0^{2\pi} = \boxed{16\sqrt{2}\pi}$.

2) On considère le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x,\ y,\ z) = (0,\ x+5y,\ z)$.

a) Calculer le flux de ce champ de vecteurs à travers le bord de Ω (orienté par le vecteur normal sortant).

Solution: Le bord $\partial\Omega$ de Ω est la surface fermée composée de deux parties : le disque Δ correspondant au disque de rayon 4 de centre $(0,0,4)$ situé dans le plan $\{z=4\}$, et la surface S introduite au 1). L'orientation de $\partial\Omega$ est par le vecteur sortant de Ω. Ainsi, la surface S est orientée par le vecteur opposé au vecteur normal de la question 1) c-à-d par $-\vec{n}(r,\theta) = \begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ -r\end{pmatrix}$ et Δ par le vecteur normal $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dirigé vers les $z>0$.

On a $flux(\vec{V},\partial\Omega) = flux(\vec{V},S) + flux(\vec{V},\Delta)$

i) $flux(\vec{V},S) = \iint_D V(s(r,\theta))\cdot(-\vec{n}(r,\theta))drd\theta = \int_0^4\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}0\\ r\cos\theta+5r\sin\theta\\ r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ -r\end{pmatrix}drd\theta$
$= \int_0^4\int_0^{2\pi}(r^2\cos\theta\sin\theta + 5r^2\sin^2\theta - r^2)drd\theta = \int_0^4 r^2dr\int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta + 5\sin^2\theta - 1)d\theta$
$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4\left[\frac{\sin^2\theta}{2} + 5(\frac{1}{2}(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2})) - \theta\right]_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\left[\frac{3\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \boxed{64\pi}$.

ii) La normale extérieure unitaire à la surface Δ et pointant vers l'extérieur de Ω est le vecteur $(0,0,1)$. De plus, comme Δ est un disque dans le plan horizontal paramétré par $(x,\ y)\mapsto(x,\ y,\ 4)$, la contribution de cette surface Δ au flux sortant est :

$$flux(\vec{V},\Delta) = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 4}\vec{V}(x,\ y,\ 4)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}dxdy = 4\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 4}dxdy = 4Aire(\Delta) = 64\pi.$$

iii) Ainsi $flux(\vec{V}, \partial\Omega) = flux(\vec{V}, S) + flux(\vec{V}, \Delta) = 64\pi + 64\pi = \boxed{128\pi}$.

b) *A quelle intégrale triple ce flux est-il égal? Calculer cette intégrale triple et retrouver de cette manière le résultat de la question* a).

Solution: Puisque la surface $\partial\Omega$ est surface fermée (orientée par le vecteur normal sortant), le théorème d'Ostrogradski nous donne :

$$flux(\vec{V}, \partial\Omega) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{V} dxdydz,$$

comme

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 0 + 5 + 1 = 6$$

On aura

$$flux(\vec{V}, \partial\Omega) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{V} dxdydz = 6 \iiint_\Omega dxdydz = 6Vol(\Omega),$$

Comme Ω est un cône (plein) de hauteur 4 et de base le disque Δ son volume est

$$Vol(\Omega) = \frac{1}{3} \text{ "hauteur" } \times \text{ "aire de la base" } = \frac{1}{3} \times 4 \times 16\pi = \frac{64\pi}{3}.$$

D'où $flux(\vec{V}, \partial\Omega) = 6 \iiint_\Omega dxdydz = 6Vol(\Omega) = 128\pi$, on retrouve ainsi le résultat de a).

B) 1) Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$(i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, $\quad (ii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n$, $\quad (iii) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} x^n$.

Solution:

i) On a $\frac{(-1)^n}{n} x^n = a_n x^n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. D'où $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = 1$. On a d'autre part, pour $x = -1$, $\sum \frac{1}{n}$ est une série de harmonique divergente et pour $x = 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente. Ainsi, le domaine de convergence est $D =]-1, 1]$.

ii) On a $\frac{n^2}{3^n} x^n = a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n^2}{3^n}$. D'où $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3}$, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = 3$. On a d'autre part, pour $|x| = 3$, $\lim_n |a_n x^n| = \lim_n n^2 = +\infty$, d'où la série diverge. Ainsi, le domaine de convergence est $D =]-3, 3[$.

iii) On a $e^{-n^2} x^n = a_n x^n$ avec $a_n = e^{-n^2}$. D'où $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = \lim_n \frac{e^{-n^2-2n-1}}{e^{-n^2}} = \lim_n e^{-2n-1} = 0$, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = +\infty$. Ainsi, le domaine de convergence est $D = \mathbb{R}$.

2) Soit $R \geqslant 0$ et $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$?

Solution: Si $|x| < R$, alors $\sum |(-1)^n a_n x^n| = \sum |a_n x^n|$ converge

Si $|x| > R$, alors $\sum |(-1)^n a_n x^n| = \sum |a_n x^n|$ diverge grossièrement ;

ainsi, d'après la définition, R est le rayon de convergence de $\sum (-1)^n a_n x^n$.

3) Montrer que $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+2)}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+2)}$.

Solution: On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, d'où $\exp(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, par suite $x \exp(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

$$\int_0^1 x\exp(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+2)}.$$

D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$, ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+2)} = \boxed{\frac{e^2-1}{2}}$.