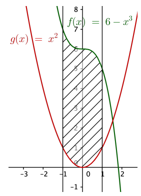
Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2019-2020

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Corrigé du CC1

Exercice 1.

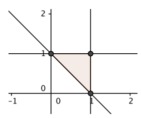


1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant 6 - x^3\}$.

2) $\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{6-x^3} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (6 - x^3 - x^2)dx = \left[6x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = 12 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{34}{3}}$.

3) $\iint_D x\, dxdy = \int_{-1}^{1} x \left(\int_{x^2}^{6-x^3} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (6x - x^4 - x^3)dx = \left[3x^2 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{-2}{5}}$.

Exercice 2.



1) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 1,\ y \leqslant 1 \text{ et } x + y \geqslant 1\}$.

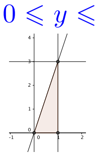
2) D s'écrit comme domaine de type II (par tranches horizontales):$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } 1-y \leqslant x \leqslant 1\}$.

3) $I = \iint_D (x+y)^2\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{1} (x+y)^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^3}{3} \right]_{1-y}^{1} dy = \int_0^1 \left(\frac{(1+y)^3}{3} - \frac{1}{3} \right) dy = \left[\frac{(1+y)^4}{12} - \frac{y}{3} \right]_0^1 = (\frac{2^4}{12} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{12} - 0) = \boxed{\frac{11}{12}}$.

Exercice 3.

1) La formule de la dérivée d'une fonction composée $(f(u(x)))' = u'(x)f'(u(x))$, avec $u(x) = x^2$ et $f(x) = \sin(x)$ nous donne $\boxed{(\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2)}$.

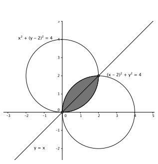
2) Le domaine d'intégration $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 3 \text{ et } \frac{y}{3} \leqslant x \leqslant 1\}$ (type II) qu'on peut décrire en type I:



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 3x\}$.

3) $\int_0^3 \left(\int_{\frac{y}{3}}^{1} (y + \cos(x^2))dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{3x} (y + \cos(x^2))dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + y\cos(x^2) \right]_0^{3x} dx = \int_0^1 \left(\frac{9x^2}{2} + 3x\cos(x^2) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}(x^3)' + \frac{3}{2}(\sin(x^2))' \right) dx = \left[\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}\sin(x^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{3}{2}(1 + \sin(1))}$

Question bonus (+1 point): $x^2 + y^2 - 4x = 0 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \iff (x-2)^2 + y^2 = 4$ (le cercle centré en $(2,0)$ et de rayon 2), de même $x^2 + y^2 - 4y = 0 \iff x^2 + y^2 - 4x + 4 = 4 \iff x^2 + (y-2)^2 = 4$ (le cercle centré en $(0,2)$ et de rayon 2). Le domaine Δ intersection des disques est symétrique par rapport à la droite $y = x$, c-à-d si $s(x,y) = (y,x)$, alors $s(\Delta) = \Delta$, d'autre part si $f(x,y) = 2x^4 - 2y^4$, $f(s(x,y)) = f(y,x) = -f(x,y)$, d'où par la formule de changement de variables on a:
$I = \iint_\Delta (2x^4 - 2y^4)\, dxdy = -\iint_\Delta (2x^4 - 2y^4)\,|-1| dxdy = -I \implies I = \iint_\Delta (2x^4 - 2y^4)\, dxdy = \boxed{0}$.



le domaine Δ est la partie grisée