Unité d'enseignement OM4

Examen terminal du 16 mai 2019

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants.
Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Seules les notes de cours sont autorisées.
Le sujet comporte **5** exercices indépendants (+ un exercice bonus) et est imprimé recto-verso.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 *(4 points)*

1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin^3 t\, dt$.

2) Calculer $J = \displaystyle\iint_{D_1} xy\, dxdy$ où $D_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.

3) Représenter $D_2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x+2\}$ et calculer son aire.

Exercice 2 *(4 points)*

Soit $\Omega = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1+x^2+y^2\}$.

1) Représenter Ω.

2) Calculer le volume de Ω. (On pourra utiliser les coordonnées cylindriques)

3) (a) Calculer $\displaystyle\iiint_\Omega z dxdydz$.

   (b) On suppose que Ω est homogène, en déduire les coordonnées (x_G, y_G, z_G) de son centre de gravité.

Exercice 3 *(4 points)*

On considère deux chemins joignant $A = (2,0)$ et $B = (-2,0)$, le segment paramétré par

$$\gamma_1(t) = (2-4t, 0) \text{ avec } t \in [0,1]$$

et le demi-cercle supérieur de diamètre AB, paramétré par

$$\gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \text{ avec } t \in [0,\pi].$$

On note par D le demi-disque délimité par γ_1 et γ_2.
On considère la forme différentielle $\omega = 5\, dx + xy\, dy$ et on pose

$$I = \int_{\gamma_1} \omega,\ \ J = \int_{\gamma_2} \omega \ \text{ et } K = \iint_D y dxdy.$$

1) Calculer (directement) les valeurs de I, J et K.

2) La forme différentielle ω est-elle exacte ?

3) Expliquer pourquoi $K = J - I$.

Exercice 4 *(4 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{V}(x,y,z) = -xz\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + x^2z\overrightarrow{k}.$$

Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$. On appelle S la surface qui forme le bord de Δ.

1) Représenter le domaine Δ.

2) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$.

3) Déterminer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface S.

Exercice 5 *(4 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 5 - x^2 - y^2,\ \ z \geqslant 1\}$ et le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x,y,z) = z^2\ \vec{i} - 3xy\ \vec{j} + x^3y^3\ \vec{k}$.

1) Déterminer l'intersection de la paraboloïde d'équation $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan $z = 1$.

2) Calculer le travail de $\vec{V}$ le long du bord de S (la courbe déterminée dans la question 1))

3) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

4) Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ à travers la surface S.

Exercice 6 *(Exercice Bonus sur 2,5 points)*

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? (justifier votre réponse)

1) Le rayon de convergence de $\sum n^{2n}x^n$ est 0.

2) Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^n - 3^n}{5^n}x^n$ est $\dfrac{5}{2}$.

3) Le rayon de convergence de $\sum x^{2^n}$ est $+\infty$.

4) Le domaine de convergence de $\sum(2n+3^n)x^n$ est $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

5) Le développement en série entière sur $]-1,1[$ de $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)x^n$.