

Exercice 1

- 1) Calculer $I = \int_0^\pi \sin^3 t \, dt$.
- 2) Calculer $J = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy$ où $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.
- 3) Représenter $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x+2\}$ et calculer son aire.

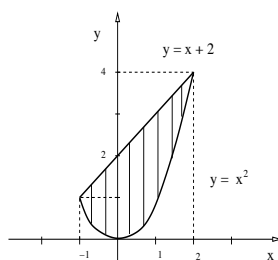
Solution:

1)

$$\int_0^\pi \sin^3 t \, dt = \int_0^\pi \sin t (1 - \cos^2 t) \, dt = \int_0^\pi \sin t \, dt + \int_0^\pi -\sin t \cos^2 t \, dt = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

2) Le domaine D_1 est de type I, par Fubini on trouve

$$J = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^x y \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 x \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \int_0^1 \frac{x^3 - x^5}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

3) La figure représentant D_2 Comme D_2 est de type I, on obtient

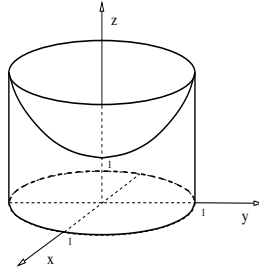
$$\text{Aire}(D_2) = \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} dy \right) dx = \int_{-1}^2 [y]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Exercice 2Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$.

- 1) Représenter Ω .
- 2) Calculer le volume de Ω . (On pourra utiliser les coordonnées cylindriques)
- 3) (a) Calculer $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$.
 (b) On suppose que Ω est homogène, en déduire les coordonnées (x_G, y_G, z_G) de son centre de gravité.

Solution:

- 1) Le domaine Ω est l'ensemble des points compris entre le disque du plan xoy d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$ et de la paraboléoïde d'équation $z = 1 + x^2 + y^2$.



2)

$$\begin{cases} \text{la condition } x^2 + y^2 \leq 1 \implies 0 \leq r \leq 1 \\ \text{la condition } 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \implies 0 \leq z \leq 1 + r^2 \\ \text{pas de conditions supplémentaires} \implies -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

d'où, en coordonnées cylindriques, Ω est représenté par

$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq z \leq 1 + r^2\}$, comme $dx dy dz = r dr d\theta dz$, on aura

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} r dr d\theta dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_0^{1+r^2} dz \right) r dr = 2\pi \int_0^1 [z]_0^{1+r^2} r dr = 2\pi \int_0^1 (1+r^2)r dr = 2\pi \int_0^1 (r+r^3) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

3) (a) En utilisant les coordonnées cylindriques, on aura

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iiint_{\tilde{\Omega}} z r dr d\theta dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_0^{1+r^2} z dz \right) r dr = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1+r^2} r dr = 2\pi \int_0^1 \frac{(1+r^2)^2}{2} r dr = \pi \int_0^1 (1+2r^2+r^4) r dr \\ &= \pi \int_0^1 (r+2r^3+r^5) dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \boxed{\frac{7\pi}{6}} \end{aligned}$$

(b) Comme Ω est homogène et invariant par la transformation $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$, on aura $x_G = y_G = 0$ et par les calculs de 2) et 3 (a)

$$z_G = \frac{1}{\text{Volume}(\Omega)} \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \frac{2}{3\pi} \times \frac{7\pi}{6} = \boxed{\frac{7}{9}}.$$

Ainsi, le centre de gravité de Ω a pour coordonnées $\boxed{(0, 0, \frac{7}{9})}$.

Exercice 3

On considère deux chemins joignant $A = (2, 0)$ et $B = (-2, 0)$, le segment paramétré par

$$\gamma_1(t) = (2 - 4t, 0) \text{ avec } t \in [0, 1]$$

et le demi-cercle supérieur de diamètre AB , paramétré par

$$\gamma_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \text{ avec } t \in [0, \pi].$$

On note par D le demi-disque délimité par γ_1 et γ_2 .

On considère la forme différentielle $\omega = 5 dx + xy dy$ et on pose

$$I = \int_{\gamma_1} \omega, \quad J = \int_{\gamma_2} \omega \text{ et } K = \iint_D y dx dy.$$

- 1) Calculer (directement) les valeurs de I, J et K .
- 2) La forme différentielle ω est-elle exacte ?
- 3) Expliquer pourquoi $K = J - I$.

Solution:

1) (a) Pour γ_1 on a
$$\begin{cases} x = 2 - 4t \implies dx = -4dt \\ y = 0 \implies dy = 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$I = \int_{\gamma_1} 5dx + xydy = \int_0^1 5 \times (-4)dt = -20 \int_0^1 dt = \boxed{-20}$$

(b) Pour γ_2 on a
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \implies dx = -2 \sin t dt \\ y = 2 \sin t \implies dy = 2 \cos t dt \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases} \quad \text{d'où}$$

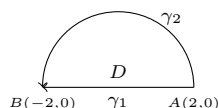
$$\begin{aligned} J &= \int_{\gamma_2} 5dx + xydy = \int_0^\pi (5 \times -2 \sin t + 2 \cos t \times 2 \sin t \times 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (-10 \sin t + 8 \sin t \cos^2 t) dt = \left[10 \cos t - 8 \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = \boxed{-\frac{44}{3}} \end{aligned}$$

(c) D est le demi-disque supérieur centré en $(0,0)$ et de rayon 2, en coordonnées polaires est représenté par $\{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, d'où

$$K = \iint_D y dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^\pi r \sin \theta d\theta \right) r dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 \times [-\cos \theta]_0^\pi = \boxed{\frac{16}{3}}$$

2) En posant : $\omega(x, y) = 5dx + xydy = Pdx + Qdy$, on a $P = 5$ et $Q = xy$, d'où $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \neq y = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc la forme ω n'est pas fermée et a fortiori n'est pas exacte.

3) Comme $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$, on aura $K = \iint_D y dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.



Le domaine D est un domaine admissible (pour l'application du théorème de Green-Riemann) de \mathbb{R}^2 , de bord $\Gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^+$ la courbe délimitant D , orientée dans le sens direct, ω est une forme différentielle de classe C^1 définie dans D , alors d'après la formule de Green-Riemann on aura

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

D'autre part, $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma_1^- \cup \gamma_2^+} 5dx + xydy = \int_{\gamma_2} 5dx + xydy - \int_{\gamma_1} 5dx + xydy = J - I$, ainsi

$$K = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy = J - I = -\frac{44}{3} + 20 = \frac{16}{3}.$$

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{V}(x, y, z) = -xz \vec{i} + x \vec{j} + x^2 z \vec{k}.$$

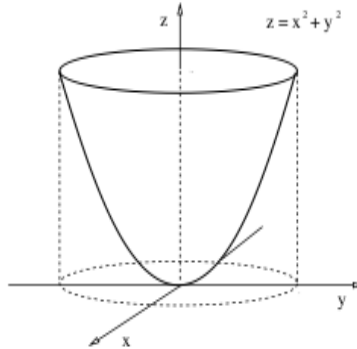
Soit Δ le domaine de \mathbb{R}^3 défini par : $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. On appelle S la surface qui forme le bord de Δ .

1) Représenter le domaine Δ .

- 2) Calculer la divergence de \vec{V} .
 3) Déterminer le flux du champ de vecteurs \vec{V} à travers la surface S .

Solution:

- 1) Pour $z \in [0, 1]$, la tranche horizontale Δ_z de Δ est un disque de centre $(x, y) = (0, 0)$ et de rayon \sqrt{z} . Δ est délimité par la paraboloidé d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.



- 2) $\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial(-xz)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z)}{\partial z} = -z + 0 + x^2 = x^2 - z$.
 3) Le bord $S = \partial\Delta$ est la réunion de la nappe $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$ et du disque $x^2 + y^2 \leq 1$ contenu dans le plan $z = 1$. Comme $S = \partial\Delta$ est fermée (i.e. de bord vide), la formule d'Ostrogradski nous donne

$$\text{flux}(\vec{V}, \partial\Delta) = \iiint_{\Delta} \text{div } \vec{V} \, dx dy dz$$

d'où $\text{flux}(\vec{V}, \partial\Delta) = \iiint_{\Delta} (x^2 - z) dx dy dz$.

En coordonnées cylindriques on a

$$\begin{cases} \text{la condition } x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \implies 0 \leq r \leq 1 \text{ et } r^2 \leq z \leq 1 \\ \text{pas de conditions supplémentaires} \implies 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta} (x^2 - z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 (r^2 \cos^2 \theta - z) dz \right) r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 (r^3 \cos^2 \theta - rz) dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[zr^3 \cos^2 \theta - r \frac{z^2}{2} \right]_{r^2}^1 dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r^3 \cos^2 \theta - \frac{r}{2} - r^5 \cos^2 \theta + \frac{r^5}{2} \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta - \frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{6} \cos^2 \theta + \frac{r^6}{12} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos^2 \theta - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cos^2 \theta + \frac{1}{12} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \right) d\theta \end{aligned}$$

Comme $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ on aura

$$\iiint_{\Delta} (x^2 - z) dx dy dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{24}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{6} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{24} \cos 2\theta - \frac{1}{8} \right) d\theta$$

$$\left[\frac{1}{24} \cos 2\theta - \frac{1}{8} \right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{-\pi}{4}}$$

Ainsi, $\text{flux}(\vec{V}, \partial\Delta) = \iiint_{\Delta} (x^2 - z) dx dy dz = \boxed{\frac{-\pi}{4}}$.

Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 5 - x^2 - y^2, z \geq 1\}$ et le champ de vecteurs \vec{V} défini sur \mathbb{R}^3 par $\vec{V}(x, y, z) = z^2 \vec{i} - 3xy \vec{j} + x^3 y^3 \vec{k}$.

- 1) Déterminer l'intersection de la parabolôide d'équation $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan $z = 1$.
- 2) Calculer le travail de \vec{V} le long du bord de S (la courbe déterminée dans la question 1))
- 3) Calculer $\text{rot } \vec{V}$.
- 4) Calculer le flux de $\text{rot } \vec{V}$ à travers la surface S .

Solution:

- 1) L'intersection de la parabolôide d'équation $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan $z = 1$, est la courbe d'équation du plan $z = 1$, d'équation $1 = 5 - x^2 - y^2$ c-à-d $x^2 + y^2 = 4$, donc le cercle contenu dans le plan $z = 1$, de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 2.
- 2) Le bord de S , est la courbe d'équations $x^2 + y^2 = 4$ et $z = 1$, en coordonnées polaires, le bord de S est paramétré (par exemple) par $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Alors le travail de \vec{V} le long du bord de S est donné par

$$\begin{aligned} \text{circulation}(\vec{V}, \partial S) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \sin t \cos t \\ 64 \cos^3 t \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = - \int_0^{2\pi} 2 \sin t dt - 24 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt \\ &= \left[2 \cos t + 24 \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = [2 \cos t + 8 \cos^3 t]_0^{2\pi} = \boxed{0}. \end{aligned}$$

$$3) \text{rot } \vec{V}(x, y, z) = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -3xy & x^3 y^3 \end{pmatrix} = 3x^3 y^2 \vec{i} + (2z - 3x^2 y^3) \vec{j} - 3y \vec{k}$$

$$4) \text{D'après la formule de Stokes, } \text{flux}(\text{rot } \vec{V}, S) = \text{circulation}(\vec{V}, \partial S) = \boxed{0}.$$

Exercice 6

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? (justifier votre réponse)

- 1) Le rayon de convergence de $\sum n^{2n} x^n$ est 0.
- 2) Le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n - 3^n}{5^n} x^n$ est $\frac{5}{2}$.
- 3) Le rayon de convergence de $\sum x^{2^n}$ est $+\infty$.
- 4) Le domaine de convergence de $\sum (2n + 3^n) x^n$ est $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.
- 5) Le développement en série entière sur $] -1, 1[$ de $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ est $\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)x^n$.

Solution:

$$1) \text{Vrai : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \implies R = 0.$$

$$2) \text{Faux : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|2^{n+1} - 3^{n+1}|}{5^{n+1}}}{\frac{|2^n - 3^n|}{5^n}} = \frac{3}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - (\frac{2}{3})^n} = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \implies R = \frac{5}{3}.$$

$$3) \text{Faux : par exemple pour } x = 1, \text{ on a } \sum_{n=0}^{+\infty} 1^{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

$$4) \text{Faux : pour } x = \frac{1}{3} \text{ on a } \sum_{n=0}^{+\infty} (2n + 3^n) \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n + 3^n}{3^n} \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

5) Vrai : sur $] - 1, 1[$, $g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, par suite $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$, alors

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2} = x^2 g'(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)x^n.$$