Unité d'enseignement OM4

Corrigé de l'examen terminal du 16 mai 2019

Exercice 1

1) Calculer $I = \int_0^{\pi} \sin^3 t\, dt$.

2) Calculer $J = \iint_{D_1} xy\, dxdy$ où $D_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.

3) Représenter $D_2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x+2\}$ et calculer son aire.

Solution:

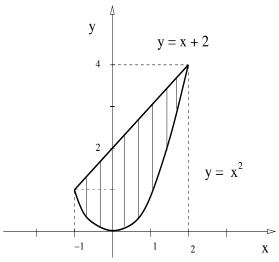
1)

$$\int_0^{\pi} \sin^3 t\, dt = \int_0^{\pi} \sin t(1-\cos^2 t)dt = \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_0^{\pi} -\sin t \cos^2 t dt = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = (1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3}) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

2) Le domaine D_1 est de type I, par Fubini on trouve

$$J = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^{x} ydy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 x\frac{x^2-x^4}{2}dx = \int_0^1 \frac{x^3-x^5}{2}dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

3) La figure représentant D_2



Comme D_2 est de type I, on obtient

$$Aire(D_2) = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2} dy\right)dx = \int_{-1}^{2} [y]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Exercice 2

Soit $\Omega = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1+x^2+y^2\}$.

1) Représenter Ω.

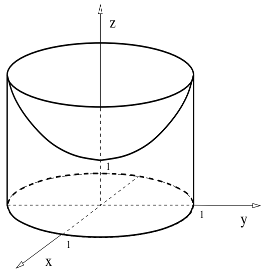
2) Calculer le volume de Ω. (On pourra utiliser les coordonnées cylindriques)

3) (a) Calculer $\iiint_{\Omega} zdxdydz$.

(b) On suppose que Ω est homogène, en déduire les coordonnées (x_G, y_G, z_G) de son centre de gravité.

Solution:

1) Le domaine Ω est l'ensemble des points compris entre le disque du plan xoy d'équation $x^2+y^2 \leqslant 1$ et de la paraboloïde d'équation $z = 1+x^2+y^2$.



2)

$$\begin{cases} \text{la condition } x^2+y^2 \leqslant 1 \implies 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ \text{la condition } 0 \leqslant z \leqslant 1+x^2+y^2 \implies 0 \leqslant z \leqslant 1+r^2 \\ \text{pas de conditions supplémentaires} \implies -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

d'où, en coordonnées cylindriques, Ω est représenté par $\tilde{\Omega} = \{(r,\ \theta,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1+r^2\}$, comme $dxdydz = rdrd\theta dz$, on aura

$$Volume(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\tilde{\Omega}} rdrd\theta dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_0^{1+r^2} dz\right) rdr = 2\pi \int_0^1 [z]_0^{1+r^2} rdr = 2\pi \int_0^1 (1+r^2)rdr = 2\pi \int_0^1 (r+r^3)dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

3) (a) En utilisant les coordonnées cylindriques, on aura

$$\iiint_\Omega zdxdydz = \iiint_{\tilde{\Omega}} zrdrd\theta dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_0^{1+r^2} zdz\right) rdr = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1+r^2} rdr = 2\pi \int_0^1 \frac{(1+r^2)^2}{2} rdr = \pi \int_0^1 (1+2r^2+r^4)rdr$$

$$= \pi \int_0^1 (r+2r^3+r^5)dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}+2\frac{r^4}{4}+\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$$

(b) Comme Ω est homogène et invariant par la transformationa $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,z)$, on aura $x_G = y_G = 0$ et par les calculs de 2) et 3 (a)

$$z_G = \frac{1}{Volume(\Omega)} \iiint_\Omega zdxdydz = \frac{2}{3\pi} \times \frac{7\pi}{6} = \boxed{\frac{7}{9}}.$$

Ainsi, le centre de gravité de Ω a pour coordonnées $\boxed{(0,0,\frac{7}{9})}$.

Exercice 3

On considère deux chemins joignant $A = (2,0)$ et $B = (-2,0)$, le segment paramétré par

$$\gamma_1(t) = (2-4t, 0) \text{ avec } t \in [0,1]$$

et le le demi-cercle supérieur de diamètre AB, paramétré par

$$\gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \text{ avec } t \in [0,\pi].$$

On note par D le demi-disque délimité par γ_1 et γ_2.
On considère la forme différentielle $\omega = 5\, dx + xy\, dy$ et on pose

$$I = \int_{\gamma_1} \omega,\ J = \int_{\gamma_2} \omega \text{ et } K = \iint_D ydxdy.$$

1) Calculer (directement) les valeurs de I, J et K.

2) La forme différentielle ω est-elle exacte ?

3) Expliquer pourquoi $K = J - I$.

Solution:

1) (a) Pour γ_1 on a $\begin{cases} x = 2 - 4t \implies dx = -4dt \\ y = 0 \implies dy = 0 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$ d'où

$$I = \int_{\gamma_1} 5dx + xydy = \int_0^1 5 \times (-4)dt = -20 \int_0^1 dt = \boxed{-20}$$

(b) Pour γ_2 on a $\begin{cases} x = 2\cos t \implies dx = -2\sin t dt \\ y = 2\sin t \implies dy = 2\cos t dt \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$ d'où

$$J = \int_{\gamma_2} 5dx + xydy = \int_0^\pi (5 \times -2\sin t + 2\cos t \times 2\sin t \times 2\cos t)dt$$

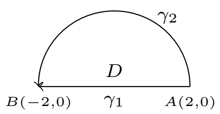
$$= \int_0^\pi (-10\sin t + 8\sin t\cos^2 t)dt = \left[10\cos t - 8\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \boxed{-\frac{44}{3}}$$

(c) D est le demi-disque supérieur centré en $(0,0)$ et de rayon 2, en coordonnées polaires est représenté par $\{(r,\theta) |\, 0 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$, d'où

$$K = \iint_D ydxdy = \int_0^2 (\int_0^\pi r\sin\theta d\theta)rdr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \times [-\cos\theta]_0^\pi = \boxed{\frac{16}{3}}$$

2) En posant : $\omega(x,y) = 5dx + xydy = Pdx + Qdy$, on a $P = 5$ et $Q = xy$, d'où $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \neq y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, donc la forme ω n'est pas fermée et a fortiori n'est pas exacte.

3) Comme $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$, on aura $K = \iint_D ydxdy = \iint_D (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy.$



Le domaine D est un domaine admissible (pour l'application du théorème de Green-Riemann) de $\mathbb{R}^2$, de bord $\Gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^+$ la courbe délimitant D, orientée dans le sens direct, ω est une forme différentielle de classe C^1 définie dans D, alors d'après la formule de Green-Riemann on aura

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy.$$

D'autre part, $\displaystyle\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1^- \cup \gamma_2^+} 5dx + xydy = \int_{\gamma_2} 5dx + xydy - \int_{\gamma_1} 5dx + xydy = J - I,$ ainsi

$$K = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy = J - I = -\frac{44}{3} + 20 = \frac{16}{3}.$$

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{V}(x,y,z) = -xz\,\vec{i} + x\,\vec{j} + x^2 z\,\vec{k}.$$

Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$. On appelle S la surface qui forme le bord de Δ.

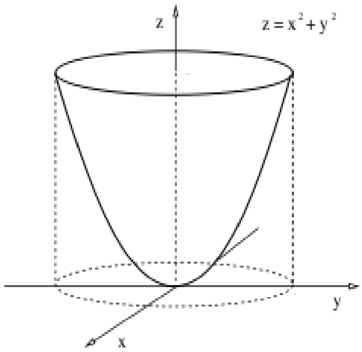
1) Représenter le domaine Δ.

2) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$.

3) Déterminer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface S.

Solution:

1) Pour $z \in [0,1]$, la tranche horizontale Δ_z de Δ est un disque de centre $(x,\ y) = (0,0)$ et de rayon $\sqrt{z}$. Δ est délimité par la paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.



2) $\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial(-xz)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 z)}{\partial z} = -z + 0 + x^2 = x^2 - z.$

3) Le bord $S = \partial\Delta$ est la réunion de la nappe $z = x^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1$ et du disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$ contenu dans le plan $z = 1$. Comme $S = \partial\Delta$ est fermée (i.e. de bord vide), la formule d'Ostrogradski nous donne

$$flux(\vec{V}, \partial\Delta) = \iiint_\Delta \operatorname{div} \overrightarrow{V} dxdydz$$

d'où $flux(\vec{V}, \partial\Delta) = \displaystyle\iiint_\Delta (x^2 - z) dxdydz.$

En coordonnées cylindriques on a

$$\begin{cases} \text{la condition } x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1 \implies 0 \leqslant r \leqslant 1 \text{ et } r^2 \leqslant z \leqslant 1 \\ \text{pas de conditions supplémentaires } \implies 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

d'où

$$\iiint_\Delta (x^2 - z) dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 (r^2 \cos^2\theta - z) dz \right) r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 (r^3 \cos^2\theta - rz) dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[zr^3 \cos^2\theta - r\frac{z^2}{2} \right]_{r^2}^1 dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^3 \cos^2\theta - \frac{r}{2} - r^5 \cos^2\theta + \frac{r^5}{2}) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2\theta - \frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{6} \cos^2\theta + \frac{r^6}{12} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{4} \cos^2\theta - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cos^2\theta + \frac{1}{12}) d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{12} \cos^2\theta - \frac{1}{6}) d\theta$$

Comme $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ on aura

$$\iiint_\Delta (x^2 - z) dxdydz = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{24}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{6}) d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{24} \cos 2\theta - \frac{1}{8}) d\theta$$

$$\left[\frac{1}{24} \cos 2\theta - \frac{1}{8} \right]_0^{2\pi} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi, $flux(\vec{V}, \partial\Delta) = \displaystyle\iiint_\Delta (x^2 - z) dxdydz = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 5 - x^2 - y^2,\ \ z \geqslant 1\}$ et le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x, y, z) = z^2\ \vec{i} - 3xy\ \vec{j} + x^3y^3\ \vec{k}$.

1) Déterminer l'intersection du paraboloïde d'équation $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan $z = 1$.
2) Calculer le travail de $\vec{V}$ le long du bord de S (la courbe déterminée dans la question 1))
3) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.
4) Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ à travers la surface S.

Solution:

1) L'intersection de la paraboloïde d'équation $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan $z = 1$, est la courbe d'équation du plan $z = 1$, d'équation $1 = 5 - x^2 - y^2$ c-à-d $x^2 + y^2 = 4$, donc le cercle contenu dans le plan $z = 1$, de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 2.
2) Le bord de S, est la courbe d'équations $x^2 + y^2 = 4$ et $z = 1$, en coordonnées polaires, le bord de S est paramétré (par exemple) par $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 1)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Alors le travail de $\vec{V}$ le long du bord de S est donné par

$$circulation(\vec{V}, \partial S) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ -12\sin t\cos t \\ 64\cos^3 t\sin^3 t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^{2\pi} 2\sin t\, dt - 24\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t\, dt$$

$$= \left[2\cos t + 24\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \left[2\cos t + 8\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}.$$

3) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x, y, z) = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -3xy & x^3y^3 \end{pmatrix} = 3x^3y^2\vec{i} + (2z - 3x^2y^3)\ \vec{j} - 3y\ \vec{k}$

4) D'après la formule de Stokes, $flux(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}, S) = circulation(\vec{V}, \partial S) = \boxed{0}$.

Exercice 6

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? (justifier votre réponse)

1) Le rayon de convergence de $\sum n^{2n}x^n$ est 0.
2) Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^n - 3^n}{5^n}x^n$ est $\dfrac{5}{2}$.
3) Le rayon de convergence de $\sum x^{2^n}$ est $+\infty$.
4) Le domaine de convergence de $\sum(2n + 3^n)x^n$ est $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.
5) Le développement en série entière sur $]-1, 1[$ de $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)x^n$.

Solution:

1) Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \implies R = 0$.
2) Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{|2^{n+1}-3^{n+1}|}{5^{n+1}}}{\frac{|2^n-3^n|}{5^n}} = \dfrac{3}{5}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-(\frac{2}{3})^n} = \dfrac{3}{5} \times 1 = \dfrac{3}{5} \implies R = \dfrac{5}{3}$.
3) Faux : par exemple pour $x = 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 1^{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$.
4) Faux : pour $x = \frac{1}{3}$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n + 3^n)(\frac{1}{3})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n + 3^n}{3^n} \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$.

5) Vrai : sur $]-1,1[$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, par suite $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$, alors $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2} = x^2 g'(x) = x^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) x^n$.