Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2018-2019

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu $n°3$ - corrigé

Exercice 1. (6 *points.*) Soit $\omega = 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$.

i) Déterminer une paramétrisation du segment γ d'origine $(1,1,1)$ et d'extrémité $(1,2,4)$.

ii) Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$.

iii) Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\omega = df$.

iv) Calculer $\displaystyle\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$ où C est un arc de cercle d'origine $(1,1,1)$ et d'extrémité $(1,2,4)$.

Solution:

i) $\gamma(t) = (1,1,1) + t((1,2,4)-(1,1,1)) = (1,1,1) + t(0,1,3) = (1, 1+t, 1+3t)$ avec $t \in [0,1]$

ii) $\begin{cases} x(t) = 1 \implies x'(t) = 0 \\ y(t) = 1+t \implies y'(t) = 1 \\ z(t) = 1+3t \implies z'(t) = 3 \end{cases}$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \big(2\times 1\times(1+t)\times(1+3t)\times 0 + 1^2\times(1+3t)\times 1 + 1^2\times(1+t)\times 3\big)\,dt = \int_0^1 ((1+3t)+3(1+t))\,dt =$$
$$\int_0^1 (4+6t)\,dt = \left[4t+3t^2\right]_0^1 = \boxed{7}$$

iii) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xyz \implies f = x^2yz + g(y,z)$ puis $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2z$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2y$, entraîne g est constante, qu'on peut choisir égale à 0. Ainsi $f(x,y,z) = x^2yz$ convient.

iv) D'après iii), ω est une forme exacte, d'où son intégrale curviligne ne dépend que des extrémités du chemin, comme C et γ ont même origine et extrémité, on aura $\int_C \omega = \int_\gamma \omega = \boxed{7}$

(ou bien: $\displaystyle\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz = f(1,2,4) - f(1,1,1) = 1^2\times 2\times 4 - 1^2\times 1\times 1 = 8-1 = \boxed{7}$)

Exercice 2. (4 *points.*)

i) Calculer le travail du gradient de $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}}$ le long de l'hélice $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ où $t \in [0,1]$.

ii) Calculer le travail de $\vec{V}(x,y) = \frac{-y}{x^2+4y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+4y^2}\vec{j}$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$: $x(t) = 2\cos t,\ y(t) = \sin t$ où $t \in [0, 2\pi]$. Que peut-on en déduire?

Solution:

i) $\displaystyle\int_C \overrightarrow{grad} f = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,0,1) - f(1,0,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) = \boxed{\sqrt{2}-2}$

ii) On a $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \implies x'(t) = -2\sin t \\ y(t) = \sin t \implies y'(t) = \cos t \end{cases}$

d'où $$\int_\mathcal{E} \vec{V}(x,y) = \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} \\ \\ \frac{2\cos t}{4\cos^2 t+4\sin^2 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2 t + 2\cos^2 t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2}{4} dt = \frac{4\pi}{4} = \boxed{\pi}.$$

Comme, le travail du champ $\vec{V}$ le long d'une courbe fermée n'est pas nul, on en déduit que ce n'est pas un champ de gradient (ne dérive pas d'un potentiel).

Remarque 0.1 *On peut aussi faire le calcul à partir de la forme différentielle associée:*
$\int_\mathcal{E} \vec{V}(x,y) = \int_\mathcal{E} \frac{-y}{x^2+4y^2}dx + \frac{x}{x^2+4y^2}dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{4\cos^2 t+4\sin^2 t}(-2\sin t) + \frac{2\cos t}{4\cos^2 t+4\sin^2 t}(\cos t)\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2 t+2\cos^2 t}{4\cos^2 t+4\sin^2 t} dt.$

Question bonus (+1 point):
Calculer, en utilisant une intégrale curviligne, l'aire du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (2,-3)$ et $C = (3,4)$.
Solution: D'après, la formule de Green-Riemann, l'aire du triangle T est donnée par la formule (voir le cours)

$$Aire(T) = \iint_D dxdy = \int_\gamma xdy$$

où γ est la courbe fermée formée des trois côtés du triangle orientée dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.
L'arc $\gamma = [A,B] \cup [B,C] \cup [C,A]$ et on a les paramétrages suivants:

$$\begin{cases} [A,B] : A + t(B-A) = t(2,-3) = (2t,-3t) \text{ avec } t \in [0,1] \\ [B,C] : B + t(C-B) = (2,-3) + t((3,4)-(2,-3)) = (2+t,-3+7t) \text{ avec } t \in [0,1] \\ [C,A] : C + t(A-C) = (-3t,-4t) \text{ avec } t \in [0,1] \end{cases}$$

D'où $\displaystyle\int_{[A,B]} xdy = \int_0^1 2t \times (-3)dt = \int_0^1 -6tdt = -3,$

$\displaystyle\int_{[B,C]} xdy = \int_0^1 (2+t) \times 7dt = \int_0^1 (14+7t)dt = 14 + \frac{7}{2},$

$\displaystyle\int_{[C,A]} xdy = \int_0^1 (3-3t) \times (-4)dt = \int_0^1 (-12+12t)dt = -12+6 = -6.$

Finalement, $\displaystyle Aire(T) = \iint_D dxdy = \int_\gamma xdy = \int_{[A,B]} xdy + \int_{[B,C]} xdy + \int_{[C,A]} xdy = -3 + (14 + \frac{7}{2}) - 6 = \boxed{\frac{17}{2}}.$

Remarque 0.2 *On peut vérifier le résultat, en utilisant la formule (voir le cours):*

$$Aire(T) = \tfrac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|8+9| = \boxed{\frac{17}{2}}.$$