Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2018-2019

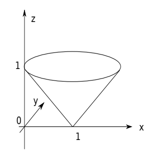
L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu $n°2$ - Corrigé

Exercice 1. (3 *points.*) Représenter et calculer le volume de

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Solution:



Pour $z \in [0, 1]$, la tranche horizontale D_z de D est un disque de centre $(x,\ y) = (1, 0)$ et de rayon z. D est donc un cône de sommet $(1, 0, 0)$ et de base D_1 (cône à l'envers).

Par Fubini en tranches horizontales, on a $\text{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz = \int_0^1 (\iint_{D_z} dxdy)dz = \int_0^1 \text{Aire}(D_z)dz = \int_0^1 \pi z^2 dz = \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2. (4 *points.*) Soit le cube $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ \ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1\}$ de densité volumique μ donnée par $\mu(x, y, z) = x^2 y + z^2$.

1) Calculer sa masse totale.

2) Déterminer son centre de gravité.

Solution:

1) On a $M(D) = \iiint_D \mu(x, y, z)dxdydz = \iiint_D x^2 y dxdydz + \iiint_D z^2 dxdydz = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-1}^1 y dy \int_{-1}^1 dz + \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 z^2 dz = 0 + 2 \times 2 \times \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^1 = \boxed{\frac{8}{3}}$

2) $x_G = \frac{1}{M(D)} \iiint_D x\mu(x, y, z)dxdydz = \frac{3}{8}(\iiint_D x^3 y dxdydz + \iiint_D xz^2 dxdydz) = \frac{3}{8}(\int_{-1}^1 x^3 dx \int_{-1}^1 y dy \int_{-1}^1 dz + \int_{-1}^1 x dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 z^2 dz) = \boxed{0}$

$y_G = \frac{1}{M(D)} \iiint_D y\mu(x, y, z)dxdydz = \frac{3}{8}\left(\iiint_D x^2 y^2 dxdydz + \iiint_D yz^2 dxdydz\right) = \frac{3}{8}(\int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-1}^1 y^2 dy \int_{-1}^1 dz + \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 y dy \int_{-1}^1 z^2 dz) = \frac{3}{8}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \times \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 \times [z]_{-1}^1 + 0\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 2 + 0\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$z_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D z\mu(x,\ y,\ z)dxdydz = \frac{3}{8}(\iiint_D x^2 yz dxdydz + \iiint_D z^3 dxdydz)$
$= \frac{3}{8}\left(\int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-1}^1 y dy \int_{-1}^1 z dz + \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 z^3 dz\right) = \boxed{0}$

Ainsi, $G = (0, \frac{1}{3}, 0)$, (G se trouve à l'intérieur du cube, sur la demi-droite $y > 0$)

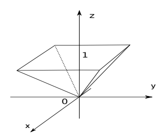
Remarque 0.1 *On aurait pu remarquer que le domaine est symétrique par rapport à l'origine et que la fonction $x\mu(x, y, z)$ (respectivement $z\mu(x, y, z)$) est impaire par rapport à x (respectivement est impaire par rapport à z), pour déduire que $x_G = z_G = 0$.*

Exercice 3. (3 *points.*) Soit $D = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ -z \leqslant x \leqslant z,\ -z \leqslant y \leqslant z\}$.

1) Représenter D. (On pourra considérer les tranches de hauteur z de D.)

2) On suppose que D est un solide homogène. Déterminer son moment d'inertie par rapport à l'axe $0z$.

Solution:



1) Pour chaque $z \in [0, 1]$, la tranche D_z de hauteur z est le carré $D_z = [-z,\ z] \times [-z,\ z]$ de côté $2z$.
D est une pyramide (à l'envers) de base le carré $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$ et de sommet l'origine $(0, 0, 0)$.

2) Par Fubini en tranches, on a

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^1 (\iint_{D_z} (x^2+y^2)dxdy)dz = \int_0^1 \left((\int_{-z}^{z} x^2dx)(\int_{-z}^{z} dy) \right) dz + \int_0^1 \left((\int_{-z}^{z} dx)(\int_{-z}^{z} y^2dy) \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left([\frac{x^3}{3}]_{-z}^{z}[y]_{-z}^{z} \right) dz + \int_0^1 \left([x]_{-z}^{z}[\frac{y^3}{3}]_{-z}^{z} \right) dz = 8\int_0^1 \frac{z^4}{3}dz = 8\left[\frac{z^5}{15}\right]_0^1 = \boxed{\frac{8}{15}}.$$

Question bonus (+1 point): Calculer, en utilisant les coordonnées sphériques,

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx.$$

Solution: Détermination du domaine d'intégration:

1) On a $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2} \implies \begin{cases} r^2 = x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \\ 0 \leqslant z = r\sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} r \in [0,2] \\ 0 \leqslant \sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} r \in [0,2] \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

2) On a $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \implies 0 \leqslant y = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \implies \sin(\theta) \geqslant 0 \implies \theta \in [0, \pi]$.

La fonction à intégrer (en coordonnées sphériques) est $f(r, \theta, \varphi) = r^2\sin(\theta)\cos(\varphi)$ et $dxdydz = r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi$, on aura

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2\sin(\theta)\cos(\varphi)(r^2\cos(\varphi))drd\theta d\varphi.$$

$$= \int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\varphi)d\varphi\int_0^2 r^4dr = \int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}d\varphi\int_0^2 r^4dr$$

$$= [-\cos(\theta)]_0^{\pi} \times \left[\frac{\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2}}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{2^5}{5} = \boxed{\frac{16\pi}{5}}$$

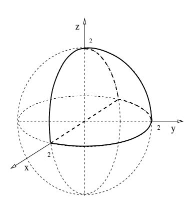


Figure 1: le domaine d'intégration est un quart de boule