Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2018-2019

L2 PCGS - Outils Mathématiques 4

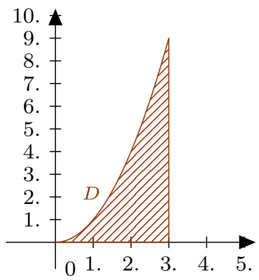
Corrigé du CC1

Exercice 1. (1,5 *points.*) Calculer $\iint_R \sin(y)\cos(x)dxdy$ où R est le rectangle $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]=\left\{(x,y)\mid {\scriptstyle 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2} \atop 0\leqslant y\leqslant \pi}\right\}$.

$\iint_R \sin(y)\cos(x)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx\int_0^{\pi}\sin(y)dy=[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}\times[-\cos(y)]_0^{\pi}=\boxed{2}$

Exercice 2. (5 *points.*) Soit D le domaine borné du plan délimité par les courbes $y=x^2$, $y=0$ et $x=3$.

1) Dessiner l'ensemble D.



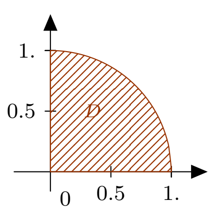
2) Calculer l'aire de D. $\text{Aire}(D)=\displaystyle\iint_D dxdy=\int_0^3\left(\int_0^{x^2}dy\right)dx=\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{27}{3}=\boxed{9}$.

3) Calculer $\iint_D exp(x^3)\,dxdy$. (Indication: On rappelle que la dérivée de $exp(x^3)$ est $3x^2exp(x^3)$)

$$\iint_D exp(x^3)dxdy=\int_0^3\left(\int_0^{x^2}exp(x^3)dy\right)dx=\int_0^3 x^2exp(x^3)dx=\left[\frac{exp(x^3)}{3}\right]_0^3=\boxed{\frac{e^{27}-1}{3}}$$

Exercice 3. (3,5 *points.*) Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\ \text{ et } x^2+y^2\leqslant 1\}$.

1) Dessiner l'ensemble D.



2) Calculer la dérivée de la fonction $f(r)=\frac{1}{1+r^2}$: $\boxed{f'(r)=\dfrac{-2r}{(1+r^2)^2}}$

3) Calculer $I=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$. (On pourra faire un changement de variables en coordonnées polaires)

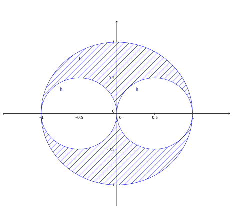
En coordonnées polaires, D est représenté par $D'=\{(r,\theta)\mid\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 1\}$, $dxdy=rdrd\theta$ et $\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1}{(1+r^2)^2}$, la formule de changement de variables, nous donne:

$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=\iint_{D'}\frac{1}{(1+r^2)^2}rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{(1+r^2)^2}dr=[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\times\left[\frac{1}{-2(1+r^2)}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\boxed{\frac{\pi}{8}}$.

4) **Question bonus (+1 point):** Déterminer (sans calcul, mais avec justification) $\iint_\Delta \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Le domaine Δ est symétrique par rapport à x, c'est-à-dire invariant par la transformation $(x,y)\mapsto(-x,y)$, dont le jacobien est égal à -1, la formule de changement de variable nous donne alors

$\iint_\Delta \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy=\iint_\Delta\frac{-x}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy=-\iint_\Delta\frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$, d'où $\iint_\Delta\frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy=\boxed{0}$.



Domaine Δ