Unité d'enseignement OM4

Examen terminal du 17 mai 2018

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants.
Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Seules les notes de cours et de TD sont autorisées
Le sujet comporte **5** exercices indépendants (+ un exercice bonus) et est imprimé recto-verso.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 *(3 points)*

1) Calculer $I = \displaystyle\iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy$ où $D_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in [-1,1]^2\}$.

2) Calculer $J = \displaystyle\iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy$ où $D_2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

3) En déduire $K = \displaystyle\iint_{D_3} (x^2+y^2)dxdy$ où $D_3 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in [-1,1]^2,\ x^2+y^2 \geqslant 1\}$.

Exercice 2 *(4 points)*

On considère le domaine $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

1) Représenter D et calculer son aire.

2) Calculer les intégrales $I = \displaystyle\iint_D xdxdy$ et $J = \displaystyle\iint_D ydxdy$.

3) On suppose que D est une plaque homogène. En déduire les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine D.

4) Soient a et b des paramètres réels donnés, Déterminer les intégrales
$I_{a,b} = \displaystyle\iint_{D_{a,b}} xdxdy$ et $J_{a,b} = \displaystyle\iint_{D_{a,b}} ydxdy$.
où $D_{a,b} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant a,\ 1 \leqslant (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 4\}$. (on pourra s'aider d'une translation)

Exercice 3 *(4 points)*

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t}{1+t^4},\ \frac{t^3}{1+t^4}\right) \end{array} \right.$ et la forme différentielle $\omega = xdy - ydx$.

1) Calculer l'intégrale de ω le long de γ.

2) Calculer l'intégrale de ω le long du segment Γ joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.

3) Déterminer si la forme ω est exacte.

4) Calculer l'aire du domaine délimité par l'arc γ et le segment Γ (on admet que le bord de ce domaine est exactement donné par l'union des images de γ et de Γ).

Exercice 4 *(5 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$, $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{(x+y)^3}{3}\vec{i} + \sin(x)\vec{j} - 2xyz\vec{k}$.

Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

1) Représenter le domaine Δ.

2) Calculer $I = \displaystyle\iiint_\Delta (x^2+y^2)dxdydz$.

3) Calculer la divergence de $\vec{V}$.
En déduire le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers le bord de Δ.

Exercice 5 *(4 points)*

Soit la surface $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ et } z \geqslant 0\right\}$ et $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x,y,z) = \vec{e}_1 + xz\ \vec{e}_2 + xy\ \vec{e}_3$.

1) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$

2) Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ à travers la surface S.

3) Calculer (directement) le travail de $\vec{V}$ le long du bord de S.

4) Conclure.

Exercice 6 *(Exercice Bonus sur 2 points)*

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? (justifier votre réponse)

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 2$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - \frac{3}{2}$

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n-1} = \frac{1}{18}$

4) Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ est $\displaystyle\frac{1}{4}$.

5) Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum n^n x^n$ est 1.

6) Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum (2^n + 3^n) x^n$ est $\displaystyle\frac{1}{3}$.