Unité d'enseignement OM4

Examen terminal du 17 mai 2018-corrigé

Exercice 1 *(3 points)*

1) Calculer $I = \displaystyle\iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy$ où $D_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1]\}$.

2) Calculer $J = \displaystyle\iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy$ où $D_2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

3) En déduire $K = \displaystyle\iint_{D_3} (x^2+y^2)dxdy$ où $D_3 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1],\ x^2+y^2 \geqslant 1\}$.

Correction :

1) Par Fubini sur le carré D_1 et séparation des variables, on trouve

$$I = \iint_{D_1} x^2dxdy + \iint_{D_1} y^2dxdy = (\int_{-1}^{1} x^2dx)(\int_{-1}^{1} dy) + (\int_{-1}^{1} dx)(\int_{-1}^{1} y^2dy) = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

2) En passant en coordonnées polaires sur le disque D_2, on a : $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $x^2+y^2 = r^2$ et $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$. On obtient

$$J = \int_0^{2\pi}(\int_0^1 r^2rdr)d\theta = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^1 r^3dr) = 2\pi \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

3) Le domaine D_3 est la carré plein D_1 privé du disque D_2, on a donc $K = I - J = \boxed{\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}}$.

Exercice 2 *(5 points)*

On considère le domaine $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

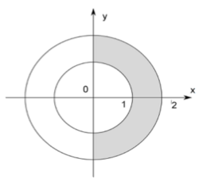
1) Représenter D et calculer son aire.

2) Calculer les intégrales $I = \displaystyle\iint_D xdxdy$ et $J = \displaystyle\iint_D ydxdy$.

3) On suppose que D est une plaque homogène. En déduire les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine D.

4) Soient a et b des paramètres réels donnés, Déterminer les intégrales
$I_{a,b} = \displaystyle\iint_{D_{a,b}} xdxdy$ et $J_{a,b} = \displaystyle\iint_{D_{a,b}} ydxdy$.
où $D_{a,b} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant a,\ 1 \leqslant (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 4\}$. (on pourra s'aider d'une translation)

Correction :



1) D est une demi-couronne de centre $(0,0)$ de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 2, ainsi
Aire(D) $= \frac{1}{2}$(Aire du disque de rayon 2) $- \frac{1}{2}$(Aire du disque de rayon 1) $= \frac{1}{2}(4\pi - \pi) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$.
On peut aussi retrouver l'aire de D en utilisant une intégrale double : en coordonnées polaires le domaine D est représenté par $\{(r,\theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$ et $dxdy = rdrd\theta$, alors

$$\text{Aire(D)} = \iint_D dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^4 rdrd\theta = (\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\theta)(\int_1^4 rdr) = \pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = \pi(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

2) D est symétrique par rapport à l'axe des x ($y \leftrightarrow -y$), on a alors $J = \iint_D ydxdy = \iint_D -ydxdy = -J \Rightarrow \boxed{J = 0}$. En passant en polaires, on obtient

$$I = \iint_D xdxdy = \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r\cos\theta) rdrd\theta = (\int_1^2 r^2 dr)(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta) = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8-1}{3} \times 2 = \boxed{\frac{14}{3}}.$$

3) On a dans le cas homogène, $x_G = \dfrac{I}{\text{Aire(D)}} = \dfrac{\frac{14}{3}}{\frac{3\pi}{2}} = \boxed{\dfrac{28}{9\pi}}$ et $y_G = \dfrac{J}{\text{Aire(D)}} = \boxed{0}$.

4) $D_{a,b}$ est une demi-couronne de centre (a, b) de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 2. La translation $\tau : (x',\ y') \to (x = x' + a,\ y = y' + b)$ (est une isométrie) elle transporte D sur $D_{a,b}$. On a alors

$$I_{a,b} = \iint_{D_{a,b}} xdxdy = \iint_D (x' + a) dx'dy' = I + a \iint_D dx'dy' = I + a.\text{Aire(D)} = \boxed{\frac{14}{3} + \frac{3a\pi}{2}}$$

$$\text{et } J_{a,b} = \iint_{D_{a,b}} ydxdy \iint_D (y' + b) dx'dy' = J + b \iint_D dx'dy' = b.\text{Aire(D)} = \boxed{\frac{3b\pi}{2}}.$$

Une autre solution : La translation $\tau : (x',\ y') \to (x = x' + a,\ y = y' + b)$ préserve les aires donc $\text{Aire}(\text{D}_{\text{a,b}}) = \text{Aire(D)} = \frac{3\pi}{2}$ et transforme le centre de gravité $(x_G, y_G) = (\frac{28}{9\pi}, 0)$ en $(x_G + a, y_G + b) = (\frac{28}{9\pi} + a, b)$ qui est alors le centre de gravité de $D_{a,b}$.

Comme $D_{a,b}$ est plaque homogène, on aura : $\dfrac{28}{9\pi} + a = \dfrac{I_{a,b}}{\text{Aire}(\text{D}_{\text{a,b}})} \implies I_{a,b} = \text{Aire}(\text{D}_{\text{a,b}})(\dfrac{28}{9\pi} + a) = \dfrac{3\pi}{2}(\dfrac{28}{9\pi} + a) = \boxed{\dfrac{14}{3} + \dfrac{3a\pi}{2}}$, et $b = \dfrac{J_{a,b}}{\text{Aire}(\text{D}_{\text{a,b}})} \implies J_{a,b} = \text{Aire}(\text{D}_{\text{a,b}})b = \boxed{\dfrac{3b\pi}{2}}$.

Exercice 3 *(4 points)*

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\frac{t}{1+t^4},\ \frac{t^3}{1+t^4}) \end{array} \right.$ et la forme différentielle $\omega = xdy - ydx$.

1) Calculer l'intégrale de ω le long de γ.
2) Calculer l'intégrale de ω le long du segment Γ joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.
3) Déterminer si la forme ω est exacte.
4) Calculer l'aire du domaine délimité par l'arc γ et le segment Γ (on admet que le bord de ce domaine est exactement donné par l'union des images de γ et de Γ).

Correction :

1) On a

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^4}.\frac{3t^2(1+t^4) - 4t^6}{(1+t^4)^2} - \frac{t^3}{1+t^4}.\frac{1+t^4-4t^4}{(1+t^4)^2} \right) dt = 2\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^4)^2} dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t^4} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

2) On a $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2})$. Le segment joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ peut donc être paramétré par $\left\{ \begin{array}{lcl} [0,\ \frac{1}{2}] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,\ t) \end{array} \right.$, on aura alors $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_0^{\frac{1}{2}} (t - t) dt = \boxed{0}$.

3) Les intégrales de ω le long de deux courbes joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ sont différentes, donc ω n'est pas exacte.
On peut également monter que ω n'est pas exacte, en vérifiant que $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. En effet, on a $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = x$, d'où $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

4) D'après la formule de Green-Riemann, l'aire du domaine est égal à $\frac{1}{2}\left(\int_\gamma \omega - \int_\Gamma \omega\right) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 0) = \boxed{\frac{1}{8}}$.

Exercice 4 *(5 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$, $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{(x+y)^3}{3}\vec{i} + \sin(x)\vec{j} - 2xyz\,\vec{k}$.

Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

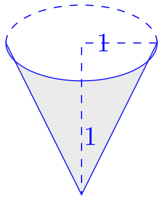
1) Représenter le domaine Δ.

2) Calculer $I = \displaystyle\iiint_\Delta (x^2+y^2)dxdydz$.

3) Calculer la divergence de $\vec{V}$.
En déduire le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers le bord de Δ.

Correction :

1. Pour $z \in [0,1]$, la tranche horizontale Δ_z de Δ est un disque de centre $(x,\ y) = (0,0)$ et de rayon z. Δ est donc un cône (plein) de sommet $(0,0,0)$ et de base D_1 le disque de centre $(0,0,1)$ et de rayon 1 (c'est un cône (à l'envers) posé sur sa pointe).



2. En coordonées cylindriques Δ est représenté par $\{(r,\theta,z) \mid r \leqslant z \leqslant 1, \theta \in [0,2\pi], r \in [0,1]\}$, comme $dx\,dy\,dz$ est transformé en $rdr\,d\theta\,dz$, on aura

$$I = \iiint_\Delta (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^2.rdr\,d\theta\,dz = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^1(\int_r^1 r^3dz)dr) = 2\pi(\int_0^1 [r^3z]_r^1 dr)$$

$$= 2\pi(\int_0^1 r^3 - r^4dr) = 2\pi\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{10}}.$$

3. $\operatorname{div}\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial(\frac{1}{3}(x+y)^3)}{\partial x} + \frac{\partial(\sin x)}{\partial y} + \frac{\partial(-2xyz)}{\partial z} = (x+y)^2 + 0 - 2xy = (x+y)^2 - 2xy = \boxed{x^2+y^2}.$

4. D'après la formule d'Ostrogradski, $flux(\vec{V}, \partial\Delta) = \iiint_\Delta \operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz$, d'où

$$flux(\vec{V}, \partial\Delta) = \iiint_\Delta (x^2+y^2)dxdydz = I = \boxed{\frac{\pi}{10}}.$$

Exercice 5 *(4 points)*

Soit la surface $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ et } z \geqslant 0\right\}$ et $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x,y,z) = \vec{e}_1 + xz\,\vec{e}_2 + xy\,\vec{e}_3$.

1) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$

2) Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ à travers la surface S.

3) Calculer (directement) le travail de $\vec{V}$ le long du bord de S.

4) Conclure.

Correction :

1) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y,z) = \nabla \wedge \vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(1)}{\partial z} - \frac{\partial(xy)}{\partial x} \\ \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(1)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix} = -y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

2) On utilise les coordonnées sphériques pour obtenir une paramétrisation de la demi-sphère supérieure

$$S = \{s(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \mid \quad \theta \in [-\pi,\pi], \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$$

La normale déterminée par cette paramétrisation est donnée par (voir le cours)

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\phi\cos\theta \\ \cos^2\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\phi \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}, S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(s(\theta,\phi))\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi}\right) d\phi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta\cos^2\phi \\ \sin\theta\cos^2\phi \\ \cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} d\phi d\theta$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2\theta\cos^3\phi + \sin^2\phi\cos\phi)\, d\phi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} -\sin^2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi d\phi + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\phi\cos\phi)\, d\phi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta - 1}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi - \cos\phi\sin^2\phi) d\phi + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\cos\phi\, d\phi$$

$$= -\pi \left[\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \left[\frac{\sin^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi(1 - \frac{1}{3}) + 2\pi\frac{1}{3} = \boxed{0}$$

3) Le bord ∂S de S est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 0$, un paramétrage en coordonnées polaire donne $\partial S = \{(x, y, z) = (\cos t, \sin t, 0) \mid t \in [0, 2\pi]\}$, d'où

$$circulation(\vec{V}, \partial S) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^{2\pi} \sin t\, dt = \boxed{0}.$$

4) On a trouvé que $flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}, S) = circulation(\vec{V}, \partial S)$, on a ainsi vérifié la formule de Stokes sur cet exemple.

Exercice 6 *(Exercice Bonus sur 2 points)*

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? (justifier votre réponse)

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 2$
2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - \frac{3}{2}$
3) $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n-1} = \frac{1}{18}$
4) Le rayon de convergence de $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ est $\dfrac{1}{4}$.
5) Le rayon de convergence de $\sum n^n x^n$ est 1.
6) Le rayon de convergence de $\sum (2^n + 3^n) x^n$ est $\dfrac{1}{3}$.

Correction

1) Vrai : $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

2) Faux : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} = e - \frac{5}{2}$

3) Vrai : $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n-1} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{13}{9} = \frac{1}{18}.$

4) Vrai : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 \implies R = \frac{1}{4}.$

5) Faux : son rayon de convergence est 0, puisque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$

6) Vrai : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{(\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{(\frac{2}{3})^n + 1} = 3 \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{(\frac{2}{3})^n + 1} = 3 \implies R = \frac{1}{3}.$