L2 - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu n° 3 - 21 mars 2018 - Durée: 20 minutes

Exercice 1. Soit $\omega = P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$ la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ où $P(x,y) = 2xy + y^2 - 1$ et $Q(x,y) = 2xy + x^2$.

1. Calculer l'intégrale curviligne de ω le long du segment de droite C reliant les points $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.
2. Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. En déduire que ω est exacte.
3. Déterminer une fonction f telle que $\omega = df$.
4. Que vaut l'intégrale curviligne de ω le long de la courbe γ de paramétrisation $\begin{cases} x = \cos^5(t) \\ y = \sin^6(t) \end{cases}$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$?

Corrigé

1. Une paramétrisation du segment C est donnée par: $(x(t), y(t)) = (1-t, t)$ avec $(t \in [0,1])$. On a alors, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, d'où $\displaystyle\int_C \omega = \int_0^1 (2(1-t)t + t^2 - 1)(-\,\mathrm{d}t) + (2(1-t)t + (1-t)^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2-2t)dt =$ $\left[2t - t^2\right]_0^1 = \boxed{1}$.
2. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 2x$. La forme ω est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est convexe donc étoilé par rapport par exemple $(0,0)$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, d'après le théorème de Poincaré, la forme différentielle ω est exacte .
3. La fonction $f\ :\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est telle que $df = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}\ dy = P\ dx + Q\ dy$, qui se traduit par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x,y) = \int (2xy + y^2 - 1)dx + C(y) = x^2y + xy^2 - x + C(y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2y + xy^2 - x + C(y)\right)}{\partial y} = 2xy + x^2 \Rightarrow C'(y) = 0 \text{ c-à-d C est constante.} \end{cases}$$

   En choisissant $C = 0$ on aura $\boxed{f(x,y) = x^2y + xy^2 - x}$.

4. L'arc γ a pour origine $A = (1,0)$ et pour extrémité $B = (0,1)$, d'où $\boxed{\displaystyle\int_\gamma \omega = f(0,1) - f(1,0) = 1}$.

Exercice 2. Soit ω la forme différentielle définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $\omega = 2xy\ dx + (x^2 + y^2)\ dy + 2z^2\ dz$

1. Calculer l'intégrale curviligne de ω le long des courbes orientées suivantes:
   (a) Le segment d'origine $(0,0,0)$ et d'extrémité $(1,1,1)$.
   (b) La courbe de paramétrisation (t, t^2, t^2) avec $t \in [0,1]$.
2. **Question bonus (1 point):** Quelle conjecture en déduisez-vous ? Prouver votre affirmation.

Corrigé:

1. Une paramétrisation du segment est donnée par: $(x(t), y(t), z(t)) = (t,t,t)$ avec $t \in [0,1]$). On a alors, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}z = \mathrm{d}t$, d'où $\displaystyle\int_{AB} \omega = \int_0^1 (2t^2 + 2t^2 + 2t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 6t^2 dt = \left[2t^3\right]_0^1 = \boxed{2}$.
2. On a $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t$, d'où l'intégrale curviligne de ω le long de γ est égale à $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_0^1 (2t^3)(1) + (t^2 + t^4)(2t) + (2t^4)(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (4t^3 + 6t^5)dt = \left[t^4 + t^6\right]_0^1 = 1 + 1 = \boxed{2}$.
3. **Question bonus:** La forme ω est exacte. En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}^3$ qui est convexe, donc étoilé et $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x},\ \ \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial(2z^2)}{\partial y},$ et $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial(2z^2)}{\partial x}.$