Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2017-2018

L2 PCGI - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu $n^0 2$ - 28 février 2018 - Durée: 2h

L'épreuve se compose de 4 exercices indépendants.
Les réponses doivent être rédigées après chaque question et, si nécessaire, au verso.
Les notes de cours et de TD sont autorisées. Calculatrice, téléphone portable etc... ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 *points.*) Calculer les intégrales suivantes:

1) $I_1 = \iint_D (y-x)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \geqslant 0,\ x \leqslant 2,\ y \leqslant 2\}$.

2) $I_2 = \iint_\Delta e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant x,\ y \geqslant -x\}$.

Exercice 2. (3 *points.*) On considère l'intégrale $I = \iiint_\Delta f(x,y,z)\ dxdydz$, où

$$f(x,y,z) = 2z^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1-(x^2+y^2) \leqslant z \leqslant 2-2(x^2+y^2)\}.$$

i) Déterminer l'intersection des paraboloïdes d'équations $z = 1-(x^2+y^2)$ et $z = 2-2(x^2+y^2)$.

ii) Calculer I.

Exercice 3. (7 *points.*)

1. Soit $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant r \leqslant 1 \text{ et } \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_{\Delta} 8r \ \ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

2. Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} \leqslant 1, \ -4 \leqslant x \leqslant 4 \text{ et } \ y \geqslant 0\right\}$.

   i) Esquisser le domaine D.

   ii) Calculer l'aire de D. (on pourra utiliser le changement de variables : $\begin{cases} x = 4r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \end{cases}$.

   iii) On suppose que D est une plaque homogène. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de D.

   iv) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 4e^{(x^2+4y^2)}$. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\iint_D f(x, y)\ dxdy$.

Exercice 4. (6 *points.*) Soit $R > 0$. On considère dans $\mathbb{R}^3$,
la demi boule

$$B_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2 \text{ et } z \leqslant 0\}$$

et le cylindre

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant R\}.$$

Soit Ω le solide composé (de la réunion) de B_- et C et dont la densité volumique est $\mu(x, y, z) = z^2$.

1) Déterminer l'image de B_- en coordonnées sphériques et celle de C en coordonnées cylindriques.

2) Calculer la masse de B_- et celle de C. En déduire la masse (totale) de Ω.

3) On se propose de déterminer les coordonnées du centre de gravité $G = (x_G, y_G, z_G)$ du solide Ω.

   i) Expliquer pourquoi l'abscisse x_G et l'ordonnée y_G de G sont nulles.

   ii) Déterminer z_G.

   iii) En déduire dans quelle partie B_- ou C du solide Ω se trouve le centre de gravite G.