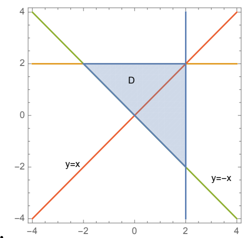
Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2017-2018

L2 PCGI - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu $n^0 2$ - Corrigé -

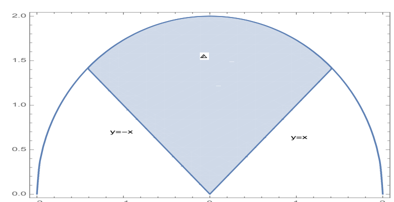
Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes:



1) $I_1 = \iint_D (y-x)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \geqslant 0,\ x \leqslant 2,\ y \leqslant 2\}$.
Corrigé: D est un triangle symétrique par rapport à la droite $y=x$, on a donc en échangeant x et y

$$I_1 = \iint_D (y-x)dxdy = \iint_D (x-y)dxdy = -\iint_D (y-x)dxdy \text{ donc } I_1 = -I_1 \text{ d'où } \boxed{I_1 = 0}.$$

Remarque: On peut aussi faire le calcul directement: on a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x \leqslant y \leqslant 2,\ -2 \leqslant x \leqslant 2\}$,
$I_1 = \int_{-2}^2 (\int_{-x}^2 (y-x)dy)dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_{-x}^2 dx = \int_{-2}^2 (\frac{4}{2} - 2x - \frac{x^2}{2} - x^2)dx = \int_{-2}^2 (2 - 2x - \frac{3x^2}{2})dx = \left[2x - x^2 - \frac{x^3}{2}\right]_{-2}^2 = (4-4-\frac{8}{2}) - (-4-4+\frac{8}{2}) = 0$
d'où $\boxed{I_1 = 0}$.



2) $I_2 = \iint_\Delta e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant x,\ y \geqslant -x\}$.
Corrigé: Δ est un quart de disque de rayon 2; en coordonnées polaires, son image est $r^2 \leqslant 4$ donc $0 \leqslant r \leqslant 2$ et l'angle $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$. $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 e^r r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^2 re^r dr = [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 re^r dr = \frac{\pi}{2}\int_0^2 re^r dr$

une intégration par partie nous donne $\int_0^2 re^r dr = [re^r]_0^2 - \int_0^2 e^r dr = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$ d'où $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{2}(e^2+1)}$.

Exercice 2. On considère l'intégrale $I = \iiint_\Delta f(x,y,z)\ dxdydz$, où

$$f(x,y,z) = 2z^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1-(x^2+y^2) \leqslant z \leqslant 2 - 2(x^2+y^2)\}.$$

i) Déterminer l'intersection des paraboloïdes d'équations $z = 1-(x^2+y^2)$ et $z = 2-2(x^2+y^2)$.
Corrigé: L'intersection est déterminée par l'égalité $1-(x^2+y^2) = 2-2(x^2+y^2)$, qui donne $\boxed{x^2+y^2=1}$, i.e. le disque unité.

ii) Calculer I.
Corrigé: On calcule cette intégrale à l'aide d'un changement de variables en coordonnées cylindriques. Le domaine Δ devient $\{(r,\theta,z) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1,\ \theta \in [-\pi,\pi] \text{ et } 1-r^2 \leqslant z \leqslant 2-2r^2\}$. D'où

$$I = \iiint_\Delta f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ rdrd\theta dz = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \left(\int_{1-r^2}^{2-2r^2} 2z^2 dz\right) rdrd\theta$$

$$= [\theta]_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \left[\frac{2}{3}z^3\right]_{1-r^2}^{2-2r^2} rdr = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 (8\left(1-r^2\right)^3 - \left(1-r^2\right)^3) rdr = \frac{28\pi}{3}\int_0^1 \left(1-r^2\right)^3 rdr$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(1-r^2\right)^3 rdr$, on utiliser le changement de variable $u = 1-r^2$, d'où $du = -2rdr$ ainsi
$\int_0^1 \left(1-r^2\right)^3 rdr = \frac{-1}{2}\int_1^0 u^3 du = \frac{-1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^0 = \frac{1}{8}$

Remarque: On peut aussi utiliser l'identité $(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$ pour obtenir $\left(1-r^2\right)^3 = 1-3r^2+3r^4-r^6$ et intégrer $\int_0^1 \left(1-r^2\right)^3 rdr = \int_0^1 (1-3r^2+3r^4-r^6)rdr = \int_0^1 (r-3r^3+3r^5-r^7)dr = \left[\frac{r^2}{2}-\frac{3r^4}{4}+\frac{3r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right]_1^0 = \frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{6}-\frac{1}{8} = \frac{24-36+24-6}{48} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$.

Ainsi $I = \iiint_\Delta f(x,y,z)\, dxdydz = \frac{28\pi}{3}\int_0^1 \left(1-r^2\right)^3 rdr = \frac{28\pi}{3}.\frac{1}{8} = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$.

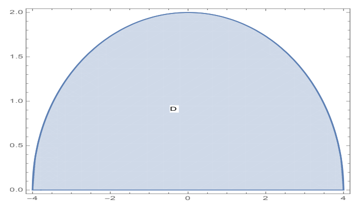
Exercice 3.

1. Soit $\Delta = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant r\leqslant 1 \text{ et } \ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}$. Calculer l'intégrale $I = \iint_\Delta 8r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

   Corrigé: $I = \iint_\Delta 8r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 8\int_0^\pi d\theta\int_0^1 rdr = 8\big[\theta\big]_0^\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{4\pi}$

2. Soit $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1,\ -4\leqslant x\leqslant 4 \text{ et } \ y\geqslant 0\right\}$.

   i) Esquisser le domaine D. **Corrigé:**



   ii) Calculer l'aire de D. (on pourra utiliser le changement de variables : $\begin{cases} x = 4r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \end{cases}$.

   Corrigé: Le Jacobien du changement de variables $\begin{cases} x = 4r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta\ ; \end{cases}$ est

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\cos\theta & -4r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 8r,$$

   et les bornes sont $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ et $0\leqslant r\leqslant 1$. D'où l'aire $\mathcal{A}(D)$ de D est égale à :

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dxdy = \int_0^\pi\int_0^1 8rdrd\theta = \boxed{4\pi} \text{ (d'après 1.)}$$

   iii) On suppose que D est une plaque homogène. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de D.
   Corrigé: • En remarquant que le domaine D est symétrique par rapport à l'axe oy, on déduit que l'abscisse x_G du centre de gravité de D est égale à $\boxed{0}$.

   • L'ordonnée y_G du centre de gravité de D est égale à $y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)}\iint_D ydxdy = \frac{1}{\mathcal{A}(D)}\int_0^\pi\int_0^1 2r\sin(\theta).8rdrd\theta = \frac{16}{\mathcal{A}(D)}\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr = \frac{16}{\mathcal{A}(D)}\big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{4\pi}.2.\frac{1}{3} = \frac{8}{3\pi}$

   Ainsi, le centre de gravité de D est le point $\boxed{G = \left(0, \frac{8}{3\pi}\right)}$.

   iv) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 4e^{(x^2+4y^2)}$. Calculer l'intégrale $J = \iint_D f(x,y)\,dxdy$.
   Corrigé: En utilisant le changement de variables précédent, l'intégrale devient :

$$J = \iint_D 4e^{(x^2+4y^2)}\,dxdy = \int_0^\pi\int_0^1 4e^{(16r^2)}8rdr\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^1 32re^{(16r^2)}\,\mathrm{d}r = \big[\theta\big]_0^\pi\left[e^{(16r^2)}\right]_0^1 = \boxed{\pi(e^{16}-1)}.$$

Exercice 4. Soit $R>0$. On considère dans $\mathbb{R}^3$,
la demi boule

$$B_- = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \text{ et } z\leqslant 0\}$$

et le cylindre

$$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant R^2 \text{ et } 0\leqslant z\leqslant R\}.$$

Soit Ω le solide composé (de la réunion) de B_- et C et dont la densité volumique est $\mu(x,y,z) = z^2$.

1) Déterminer l'image de B_- en coordonnées sphériques et celle de C en coordonnées cylindriques.
Corrigé: La demi-boule B_- a pour image en coordonnées sphériques

$$\{(r,\ \theta,\ \varphi)|\ r \in [0,\ R],\ \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [-\pi/2, 0]\}$$

Le cylindre C a pour image en coordonnées cylindriques

$$\{(r,\ \theta,\ z)|\ r \in [0,\ R],\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0,\ R]\}$$

2) Calculer la masse de B_- et celle de C. En déduire la masse (totale) de Ω.
Corrigé:

a) En coordonnées sphériques, $\mu(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin^2 \varphi$ et $dxdydz = r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi$, d'où la masse M_{B_-} de B_- est égale à

$$M_{B_-} = \iiint_{B_-} z^2 dxdydz = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{0} r^2 \sin^2 \varphi\, r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^4 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{0} \cos\varphi \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{R^5}{5} 2\pi [\frac{1}{3} \sin^3 \varphi]_{-\pi/2}^{0} \ = \boxed{\frac{2\pi R^5}{15}}$$

b) En coordonnées cylindriques, $\mu(\rho,\ \theta,\ z) = z^2$ et $dxdydz = rdrd\theta d\varphi$, d'où la masse M_C de C est égale à

$$M_C = \iiint_C z^2 dxdydz = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R z^2 r dr d\theta dz = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R z^2 dz = \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{R^3}{3} = \boxed{\frac{\pi R^5}{3}}$$

c) Puisque $\Omega = B_- \cup C$ et $B_- \cap C$ est une courbe, $\iiint_\Omega \mu dxdydz = \iiint_B \mu dxdydz + \iiint_C \mu dxdydz$ d'où la masse totale du solide Ω est égale $M_\Omega = M_{B_-} + M_C$ ainsi

$$M_\Omega = M_{B_-} + M_C = \frac{2\pi R^5}{15} + \frac{\pi R^5}{3} = (\frac{2}{15} + \frac{1}{3})\pi R^5 = \boxed{\frac{7\pi R^5}{15}}.$$

3) On se propose de déterminer les coordonnées du centre de gravité $G = (x_G, y_G, z_G)$ du solide Ω.

i) Expliquer pourquoi l'abscisse x_G et l'ordonnée y_G de G sont nulles.
Corrigé: On a $x_G = \dfrac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega xz^2 dxdydz$ et $y_G = \dfrac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega yz^2 dxdydz$.
Le solide Ω est symétrique par rapport au plan yoz et la fonction $f(x, y, z) = xz^2$ est impaire par rapport à x, puisque $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$, d'où $\iiint_\Omega xz^2 dxdydz = 0$, ainsi $\boxed{x_G = 0}$.
De même, le solide Ω est symétrique par rapport au plan xoz et la fonction $g(x, y, z) = yz^2$ est impaire par rapport à y, puisque $g(x, -y, z) = -g(x, y, z)$, d'où $\iiint_\Omega yz^2 dxdydz = 0$, ainsi $\boxed{y_G = 0}$.

Remarque: On peut aussi obtenir ce résultat par le calcul: puisque $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\theta = 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta = 0$, on a:

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\mu(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{0} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta d\theta \int_0^R z^2 dz = 0$$

de même

$$y_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega y\mu(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{0} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R z^2 dz = 0$$

ii) Déterminer z_G.
Corrigé:

$$z_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z\mu(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z^3 dxdydz = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_{B_-} z^3 dxdydz + \frac{1}{M_\Omega} \iiint_C z^3 dxdydz$$

$$= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{0} \cos\varphi \sin^3 \varphi d\varphi + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R z^3 dz$$

$$= \frac{15}{7\pi R^5} (\frac{R^6}{6} 2\pi [\frac{1}{4} \sin^4 \varphi]_{-\pi/2}^{0} + \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{R^4}{4}) = \frac{15\pi R^6}{7\pi R^5} (-\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) = \frac{15R}{7} . \frac{2}{12} = \boxed{\frac{5R}{14}}$$

iii) En déduire dans quelle partie B_- ou C du solide Ω se trouve le centre de gravite G.

Corrigé: Le centre de gravité G de Ω a pour coordonnées $\boxed{G = (0, 0, \frac{5R}{14})}$.

Puisque $\frac{5R}{14} > 0$, le centre de gravité de Ω se trouve dans la partie cylindrique (de plus, comme $\frac{5R}{14} < R$, il se trouve à l'intérieur de Ω).