Nom et Prénom:

Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2017-2018

L2 - Outils Mathématiques 4

Contrôle continu n° 1 : Corrigé

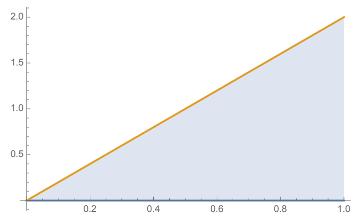
Exercice 1. (3 *points.*) Calculer l'intégrale suivante en intervertissant l'ordre d'intégration:

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \sin(x^2)dx \right) dy$$

Réponse: Le domaine d'intégration $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ y \in [0,2]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ x \in [0,1]\}$, d'où

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \sin(x^2)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} \sin(x^2)dy \right) dx = \int_0^1 \sin(x^2)[y]_0^{2x} dx = \int_0^1 2x\sin(x^2)dx = [-\cos(x^2)]_0^1 = \boxed{1-\cos(1)}$$

(on a utlisé $(\cos(x^2))' = (x^2)'\cos'(x^2) = 2x(-\sin(x^2)) = -2x\sin(x))$



Exercice 2. (7 *points.*) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1-x^2 \leqslant y \leqslant 3-3x^2\}$.

a) Déterminer les points d'intersections des courbes $y = 3-3x^2$ et $y = 1-x^2$.

b) Esquisser le domaine D.

c) Calculer l'aire de D.

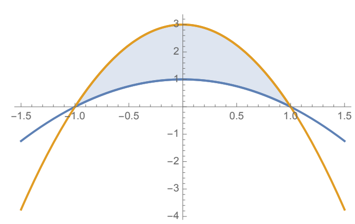
d) Calculer $I = \displaystyle\iint_D 2x^2y\ dxdy$.

e) **Question bonus (+1 point):** Déterminer (en utilisant un argument de symétrie) la valeur de $\displaystyle\iint_D 2xy^2\ dxdy$.

Réponse:

a) L'égalité $1-x^2 = 3-3x^2$ donne $2x^2 = 2$ ou encore $x^2 = 1$ qui a pour solutions $x = 1$ et $x = -1$, en remplaçant x par sa valeur on trouve dans les deux cas $y = 0$. Ainsi les points d'intersections des deux courbes sont $\boxed{\text{(1,0) et (-1,0).}}$

b)



c) L'aire de D est égale à

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{1-x^2}^{3-3x^2} dy \right) dx = \int_{-1}^1 (2-2x^2)dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{+1} = (2-\frac{2}{3}) - (-2+\frac{2}{3}) = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

d) $$\iint_D 2x^2y\ dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{1-x^2}^{3-3x^2} 2x^2y dy \right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \left(\int_{1-x^2}^{3-3x^2} 2ydy \right) dx = \int_{-1}^1 x^2[y^2]_{1-x^2}^{3-3x^2} dx = 8\int_{-1}^1 x^2(1-x^2)^2dx =$$
$$8\int_{-1}^1 (x^6-2x^4+x^2)dx = 8\left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = 16(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}) = 16\frac{8}{105} = \boxed{\frac{128}{105}}$$

e) **Question bonus:** Le domaine D est symétrique par rapport à x, c'est-à-dire est préservé par la transformation $(x,y) \mapsto (-x,y)$, dont le jacobien est égal à -1, alors

$$\iint_D 2xy^2\ dxdy = \iint_D 2(-x)y^2|-1|\ dxdy = -\iint_D 2xy^2\ dxdy, \text{ d'où } \boxed{\iint_D 2xy^2\ dxdy = 0}.$$