Note :

Nom et prénom:	QUELQUES INDICATIONS	**Table:**

Outils mathématiques 4
Contrôle continu du 05 avril 2017
Durée de l'épreuve : 1 heure

Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées. Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants.

La rédaction se fait sur ce document ; elle peut être continuée sur papier libre.

Note :

Exercice 1 (Indépendance d'une intégrale curviligne du chemin d'intégration). On considère un champ vectoriel bi-dimensionnel $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui peut aussi être défini par ses composantes $\vec{F}(x,y) = X(x,y)\vec{e}_x + Y(x,y)\vec{e}_y$. On suppose que

$$X(x,y) = x^k y^{l+1}$$
$$Y(x,y) = ax^{k+1}y^l,$$

où k et l sont des entiers positifs et a une constante réelle positive.

Soit L un chemin continûment dérivable d'extrémités A et B. Sous quelles conditions sur a, k et l, l'intégrale curviligne $\int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ est-elle indépendante du chemin d'intégration L (ne dépend que des extrémités A et B de L) ?

Rappel : $\int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} := \int_L (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y)$. **Suggestion :** utiliser la formule de Green et un résultat du cours.

Soit C un chemin fermé arbitraire continûment dérivable. La formule de Green établit que

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} := \oint_C \left(X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y \right) = \iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où D est le domaine entouré de C. On a vu en cours que si cette intégrale s'annule sur tout chemin fermé C, alors l'intégrale sur tout chemin L ne dépend que des extrémités du chemin. Il suffit donc de chercher la condition d'annulation de cette intégrale, condition garantie si

$$\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}, \quad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

On calcule,

$$\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = a(k+1)x^k y^l$$
$$\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = (l+1)x^k y^l.$$

Si $a = \frac{l+1}{k+1}$, l'intégrale curviligne s'annule sur tout chemin fermé, ce que — par un résultat démontré en cours — implique l'indépendance de la valeur de l'intégrale du chemin d'intégration.

Note :

Exercice 2 (Utilisation de la formule de Green). Un champ vectoriel bi-dimensionnel $\vec{F}(x,y) = X(x,y)\vec{e}_x + Y(x,y)\vec{e}_y$ est défini par les formules de ses composantes :

$$X(x,y) = \exp(3y) - y^2\sin(x)$$
$$Y(x,y) = 3x\exp(3y) + 2y\cos(x).$$

On note par C l'ellipse décrite sous forme paramétrique par les équations

$$x(t) = a\cos(t);\; y(t) = b\sin(t), \text{ pour } t \in [0,2\pi], a,b > 0.$$

1. Exprimer l'intégrale curviligne $\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ comme une intégrale ordinaire en la variable t. **Seulement la forme de cette intégrale est demandée, pas son calcul !**

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} &:= \oint_C \left(X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\exp(3b\sin(t)) - b^2\sin^2(t)\sin(a\cos(t))\right](-a\sin(t))\mathrm{d}t\\ &\quad + \int_0^{2\pi}\left[3a\cos(t)\exp(3b\sin(t)) + 2b\sin(t)\cos(a\cos(t))\right]b\cos(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2. Déterminer $\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$. **Réfléchissez avant de vous lancer dans des calculs compliqués et inutiles !**

   Par la formule de Green, nous savons que

   $$\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

   où D est le domaine bordé par l'ellipse C. Or

   $$\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = 3\exp(3y) - 2y\sin(x) = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}.$$

   Par conséquent,

   $$\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

Note :

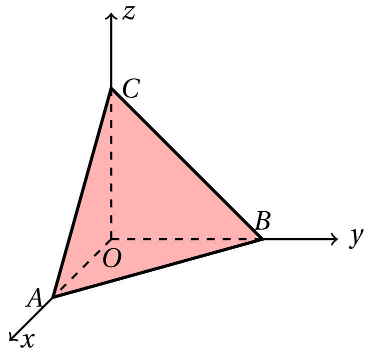
Exercice 3 (Vérification de la formule de Stokes). Le but de cet exercice est de vérifier la formule de Stokes en calculant explicitement les deux membres de cette formule. Soient

— le champ tri-dimensionnel $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par le formule

$$\vec{F}(x,y,z) = y^2\vec{e}_x + z^2\vec{e}_y + x^2\vec{e}_z,$$

— T le domaine (bordé par le triangle ABC) obtenu par l'intersection du premier octant avec le plan défini par l'équation $G(x, y, z) = 0$, où $G(x, y, z) := x + y + z - 1$, (cf. figure ci-dessous),

— et L la frontière de T, composée des segments AB, BC et CA.



1. Déterminer les equations des droites définies par les segments AB, BC et CA.

La droite qui passe par AB se trouve sur l'intersection du plan d'équation $x + y + z = 1$ et le plan Oxy d'équation $z = 0$. Elle sera par conséquent définie comme le lieu géométrique : $E_{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$. De même, on détermine les équations des autres droites passant par AC : $x + z = 1$ et passant par CB : $y + z = 1$.

2. Déterminer les coordonnées des points A, B et C et les longueurs des segments ayant ces points comme extrémités.

Le point A se trouve sur la droite passant par AB d'équation $x + y = 1$ et correspond à $y = 0$; ses coordonnées sont donc $(1, 0, 0)$. De même, on détermine les coordonnées des autres points $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$.
On calcule immédiatement les longueurs de ces segments : $\ell_{AB} = \ell_{AC} = \ell_{BC} = \sqrt{2}$.

3. Calculer directement l'intégrale $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

Le contour L autour du triangle T est la réunion des segments AB, BC et CA. Ces segments ne s'intersectent mutuellement qu'à un point. Par conséquent,

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{L_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{L_{BC}} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{L_{CA}} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

On calcule alors les intégrales séparément. Pour la première on a

$$\begin{aligned}
\int_{L_{AB}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \int_A^B (y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z) \text{ où } x, y, z \text{ sont contraints à vivre sur le segment } AB\\
&= \int_1^0 y^2\mathrm{d}x = \int_1^0 (1-x)^2\mathrm{d}x = -\int_0^1 (1-x)^2\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on calcule les deux autres intégrales :

$$\int_{L_{BC}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^0 z^2\mathrm{d}y = \int_1^0 (1-y)^2\mathrm{d}y = -\frac{1}{3} \text{ et } \int_{L_{CA}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^0 x^2\mathrm{d}z = \int_1^0 (1-z)^2\mathrm{d}z = -\frac{1}{3}.$$

On conclut donc que

$$\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -1.$$

4. Calculer le rotationnel $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

On a vu en cours qu'en notant “det“ la formule symbolique qui se calcule selon les règles de calcul du déterminant, on a

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \text{“det“}\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2 \end{pmatrix} = -2(z\vec{e}_x + x\vec{e}_y + y\vec{e}_z).$$

5. Utiliser la fonction G qui définit le plan pour déterminer les composantes du vecteur normal $\vec{n}$ à un point arbitraire de T.

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G}{\|\vec{\nabla}G\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z).$$

6. Calculer $I = \iint_T \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma$. **Suggestion :** vous pouvez calculer l'aire du triangle T de manière élémentaire.

$$I = \frac{-2}{\sqrt{3}}\iint_T (z+x+y)\mathrm{d}\sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathsf{Aire}(T).$$

Or T est un triangle équilatéral de côté $\ell = \sqrt{2}$. On calcule sa hauteur $h = \sqrt{\ell^2 - (\frac{\ell}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et son aire $\mathsf{Aire}(T) = \frac{1}{2}\ell\times h = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On conclut que $I = -1$ ce qui permet de vérifier la formule de Stokes :

$$\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_T \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma.$$

La solution sera mise en ligne peu de temps après la fin de l'épreuve.