UNIVERSITÉ DE RENNES I
UFR MATHÉMATIQUES

Licence Sciences Technologies Santé
Année 2016–2017

Note :

Nom et prénom: QUELQUES INDICATIONS **Table:**

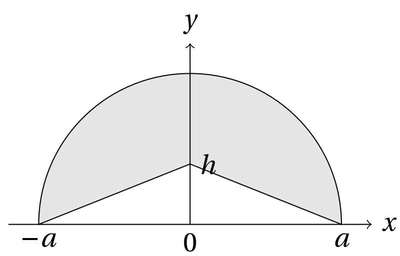
Outils mathématiques 4
Contrôle continu du 15 mars 2017
Durée de l'épreuve : 1 heure

Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées. Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants.

La rédaction se fait sur ce document.

Exercice 1 (Centroïde, moment d'inertie. Noté sur 15). On considère le domaine plan D bordé par le demi-cercle de centre $(0,0)$ et de rayon a situé dans le demi-plan $y \geq 0$ et le triangle isocèle de base $(-a,a)$ et hauteur $0 \leq h \leq a$. Ce domaine est représenté en grisé dans la figure ci-dessous.

Note :



1. Calculer l'aire S_D du domaine D *en effectuant l'intégrale double* qui la définit.

$$S_D = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\left(\int_{h(1-\frac{|x|}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x - h\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\mathrm{d}x.$$

— La première intégrale s'effectue facilement à l'aide du changement de variable $x = a\cos\phi$,

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -a^2\int_{\pi}^{0}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2\phi)}{2}\mathrm{d}\phi = \frac{\pi a^2}{2}.$$

— L'intégrand de la deuxième intégrale est une fonction paire en la variable x et le domaine d'intégration symétrique autour de 0. On aura donc

$$h\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\mathrm{d}x = 2h\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x = 2ha - 2\frac{h}{a}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^a x\,\mathrm{d}x = 2ha - 2\frac{h}{a}\frac{a^2}{2} = ha.$$

En conclusion, $S_D = \frac{\pi a^2}{2} - ha$ (comme on pourrait s'y attendre).

2. Par un argument de symétrie, déterminer l'abscisse, c_x, du centroïde $\mathbf{c}$ de D.

On a $c_x = \frac{1}{S_D}\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Or le domaine sur lequel on intègre est symétrique par rapport à l'axe Oy, tandis que l'intégrand est impair dans la variable x. L'abscisse c_x sera donc nulle.

3. Calculer explicitement l'ordonnée, c_y, du centroïde $\mathbf{c}$ de D.

On a $c_y = \frac{1}{S_D}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Comme l'aire $S_D = \frac{\pi a^2}{2} - ha$ a été déterminée à la question 1, il suffit de calculer l'intégrale double. On a

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-a}^{a}\left(\int_{h(1-\frac{|x|}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2-h^2\left(1-\frac{|x|}{a}\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{a}\left(a^2-x^2-h^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)\mathrm{d}x \quad \text{(car l'intégrand est pair et l'intervalle symétrique)} \\
&= \int_{0}^{a}\left(a^2-x^2-h^2-\frac{h^2}{a^2}x^2+\frac{2h^2}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2a^3}{3}-\frac{h^2a}{3}.
\end{aligned}$$

En conclusion, $c_y = \frac{2}{3}\frac{2a^2-h^2}{\pi a-2h}$.

4. Pour quelles valeurs de h, le centroïde de D (i.e. le barycentre pour une plaque homogène ayant la forme de D) se trouve dans D ?

Lorsque h varie, l'ordonnée du centroïde devient une fonction de h, donnée par la formule $c_y(h) = \frac{2}{3}\frac{2a^2-h^2}{\pi a-2h}$. Pour que le centroïde soit à l'intérieur du domaine, il faut que $h < c_y(h)$, i.e. $h < \frac{2}{3}\frac{2a^2-h^2}{\pi a-2h}$. La valeur critique de h est celle où $h_{\mathrm{crit}} = c_y(h_{\mathrm{crit}})$. En résolvant l'équation du second degré correspondante on trouve

$$h_{\mathrm{crit}} = \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{9\pi^2-64}\right)a.$$

Le centroïde sera donc dans le domaine D lorsque $h < h_{\mathrm{crit}}$.

5. Calculer le volume du solide de révolution balayé lorsque le domaine D effectue une rotation de 2π autour de l'axe horizontal. Suggestion : on peut utiliser le théorème de Pappus (cf. exercice 20 du Recueil d'exercices utilisé en TD).

Le domaine D se situe du côte $y \geq 0$ du plan. Par le théorème de Pappus, on calcule

$$\mathrm{Vol} = 2\pi c_y S_D = \frac{2\pi}{3}(2a^3 - h^2 a).$$

6. Calculer le moment d'inertie $M = \frac{1}{S_D} \iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ du domaine D autour de l'axe horizontal. Suggestion : si on note D_T le domaine délimité par le triangle et D_C le domaine délimité par le demi-cercle, observer que $D \cup D_T = D_C$ pour écrire l'intégrale définissant M comme une différence d'intégrales qu'il est plus facile ensuite de calculer séparément.

On se sert de la suggestion pour écrire

$$MS_D = \iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_C} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_T} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On calcule la première intégrale en passant à des coordonnées polaires :

$$\iint_{D_C} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_C} r^2 \sin^2\phi\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \left(\int_0^a r^3 \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin^2\phi \mathrm{d}\phi\right) = \frac{a^4}{4}\frac{\pi}{2},$$

où l'on a utilisé le calcul fait en question 1 pour déterminer l'intégrale de $\sin^2\phi$. Pour la deuxième intégrale, on obtient

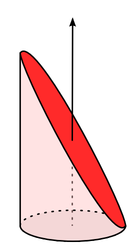
$$\iint_{D_T} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^h \left(\int_{-a+a/h}^{a-a/h} \mathrm{d}x\right) y^2 \mathrm{d}y = \int_0^h (2a - \frac{2a}{h} y) y^2 \mathrm{d}y = \frac{ah^3}{6}.$$

En conclusion : $M = (\frac{\pi a^4}{8} - \frac{ah^3}{6})/(\frac{\pi a^2}{2} - ah) = (\frac{\pi a^3}{8} - \frac{h^3}{6})/(\frac{\pi a}{2} - h)$.

Note :

Exercice 2 (**Masse d'un cône bisauté inhomogène. Noté sur 12**)**.**

On considère le cylindre biseauté délimité par le cylindre d'équation



$$x^2 + y^2 = a^2$$

et les plans d'équations

$$z = 0 \quad \text{et} \quad hx + 2az = ha.$$

On notera D le disque de fond dans le plan (Oxy) (de rayon a centré en 0)

1. Calculer le volume du cylindre biseauté.

Pour un point (x, y) de D, z varie entre 0 et $\frac{h}{2a}(a-x)$. Par conséquent, le volume du solide délimité par le cylindre biseauté est donné par la formule

$$\mathrm{Vol} = \iiint_S \mathrm{d}V = \iint_D \left(\int_0^{\frac{h}{2a}(a-x)} \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{h}{2a}(a-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{h}{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{h}{2a}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

La première intégrale est égale à l'aire du disque D de rayon a centré en 0 ; elle vaut donc πa^2. D'autre part la surface D est symétrique par rapport à l'axe Oy et l'intégrand est impair. La deuxième intégrale est donc nulle. (On peut aussi le voir en faisant le calcul en coordonnées cartésiennes ou polaires).
En conclusion : Vol = $\frac{\pi a^2 h}{2}$.

2. Utiliser une propriété géométrique du cylindre biseauté pour déterminer l'aire de sa surface latérale (i.e. sans le disque du dessus ni le fond).

Le cylindre biseauté est la moitié du cylindre de hauteur h et de base D. Sa surface latérale est donc la moité de la surface d'un cylindre de hauteur h est de rayon a :

$$\text{Surface latérale} = \frac{1}{2} \times h \times (2\pi a) = ha\pi$$

3. On remplit le volume d'un liquide de masse volumique ρ dépendant de la hauteur z via la relation :

$$\rho(z) = k\frac{a}{h}\left(1 - 2\frac{z}{h}\right) = -k\frac{2a}{h^2}z + k\frac{a}{h},$$

où k est une constante (ayant des dimensions $[\![\frac{M}{L^3}]\!]$ pour que ρ soit une masse volumique). Calculer la masse totale du liquide remplissant le cylindre biseauté. Suggestion : On peut utiliser sans démonstration la formule $\int_0^a (a^2 - t^2)^{3/2} \mathrm{d}t = \frac{3a^4\pi}{16}$.

On doit calculer

$$\iiint_S \rho(z)\mathrm{d}V = \iint_D \left(\int_0^{\frac{h}{2a}(a-x)} \rho(z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Or

$$\int_0^{\frac{h}{2a}(a-x)} \rho(z)\mathrm{d}z = k\left[-\frac{a}{h^2}z^2 + \frac{a}{h}z \right]_0^{\frac{h}{2a}(a-x)}.$$

Le terme entre crochets ci-dessus devient

$$\frac{-(a-x)^2}{4a} + \frac{1}{2}(a-x) = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4a}x^2 = \frac{a}{4} + \frac{1}{4a}x^2.$$

Or à y fixé entre $-a$ et a, x varie entre $-\sqrt{a^2 - y^2}$ et $\sqrt{a^2 - y^2}$. Ainsi

$$\iint_D \left(\frac{a}{4} + \frac{1}{4a}x^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{4}\pi a^2 + \int_{-a}^{a} \frac{1}{6a}\left[x^3\right]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}y = \frac{a^3}{4}\pi + \frac{1}{3a}\int_{-a}^{a} (a^2 - y^2)^{3/2} \mathrm{d}y.$$

En utilisant la suggestion donnée dans l'énoncé de la question, ceci donne

$$\text{Masse} = k\frac{a^3\pi}{4} + k\frac{3a^4\pi}{48a} = k\frac{3a^3\pi}{16}$$

La solution sera mise en ligne peu de temps après la fin de l'épreuve.