UNIVERSITÉ DE RENNES I
UFR MATHÉMATIQUES

Licence Sciences Technologies Santé
Année 2016–2017

Note :

Nom et prénom: QUELQUES INDICATIONS **Table:**

Outils mathématiques 4
Contrôle continu du 15 février 2017
Durée de l'épreuve : 1 heure

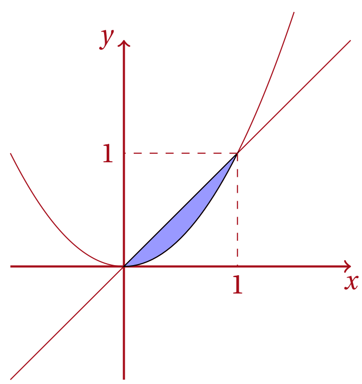
Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées. Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants.

La rédaction se fait sur ce document.

Exercice 1 (**Calcul d'une intégrale double**). On pose $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leq y \leq x\right\}$ et $f(x, y) = x^2$.

Note :

1. Représenter la région D dans le plan.



2. Calculer $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

On déduit de la question précédente que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

Nous avons donc

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^x x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}.$$

Exercice 2 (Changement de variables). On pose $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y \geq 0, x^2 + y^2 \leq \pi^2\right\}$.

Note :

1. Montrer que lors du changement des coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$, le domaine s'exprime par

$$\Phi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] | 0 \leq r \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour $\theta \in [0,2\pi]$,

$$\cos(\theta) \geq \sin(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in [0,\pi/4].$$

On va bien entendu passer en coordonnées polaires (r,θ). D'après le cours, le changement de variable s'écrit $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. L'inégalité $x^2 + y^2 \leq \pi^2$ se réécrit donc $r \leq \sqrt{\pi}$.
Par ailleurs, l'inégalité $x \geq y \geq 0$ se réécrit $r\cos(\theta) \geq r\sin(\theta) \geq 0$ ce qui est équivalent à dire que $\theta \in [0,\pi/4]$, propriété que l'on peut par exemple illustrer par un dessin du cercle trigonométrique.

2. Calculer $\iint_D x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2} \times (x^2+y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (*Suggestion :* On pourra commencer par justifier que la dérivée de la fonction définie par la formule $r \mapsto \sin(r^3)/3$ est $r \mapsto r^2\cos(r^3)$.)

D'après la question précédente et le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2} \times (x^2+y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi} r\cos(\theta)\cos(r^3) r\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/4} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi} r^2\cos(r^3)\mathrm{d}r\right) \\
&= [\sin(\theta)]_0^{\pi/4} \left[\sin(r^3)/3\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{2}\sin(\pi^3)}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (Calcul du volume d'une boule tronquée)**.** Soit S la demi-sphère de centre $(0,0,-1)$ et de rayon 2 donnée par l'équation $z = \sqrt{4-x^2-y^2} - 1$.

Note :

1. Déterminer l'intersection de S avec le plan xy.

L'intersection est déterminée par la satisfaction simultanée des équations de la demi-sphère $z = \sqrt{4-x^2-y^2} - 1$ et du plan $z = 0$. On obtient donc

$$\sqrt{4-x^2-y^2}-1=0 \Rightarrow 4-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=3.$$

On conclut que l'intersection de S avec le plan xy est le cercle à l'intérieur du plan xy, de centre 0 et de rayon $\sqrt{3}$.

2. Calculer le volume délimité par le plan xy et la demi-sphère.

Le volume en question est donné par l'intégrale double :

$$V=\iint_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2}-1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

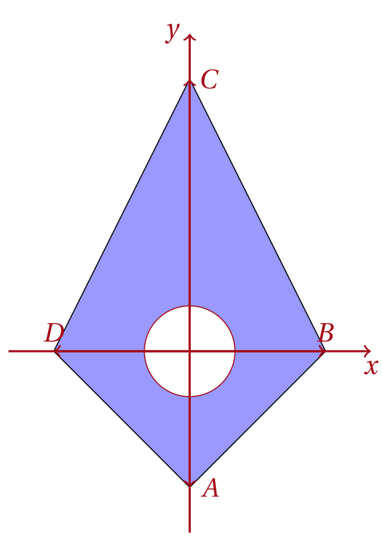
avec D, le disque dans le plan xy de centre 0 et de rayon $\sqrt{3}$.
On effectue le calcul en coordonnées polaires, ce qui donne :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{(4-\rho^2)}-1\right)\rho \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}-\rho^2/2\right]_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi(-1/3-3/2+8/3)=5\pi/3 \end{aligned}$$

Exercice 4. On considère les quatre points suivants du plan : $A(0,-3), B(3,0), C(0,6)$ et $D(-3,0)$. On définit le domaine D comme quadrilatère de sommets A, B, C, D privé du disque unité $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2\leq 1\}$.

Note :

1. Esquisser le domaine D.



2. Donner les équations des droites passant par AB, BC, CD, et DA.

Les équations des droites sont :

$$AB : y = x-3, \quad BC : y = -2x+6, \quad CD : y = 2x+6, \quad DA : y = -x-3.$$

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ que l'on suppose continue. Exprimer chacune des intégrales I et J ci-dessous

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \text{et} \quad J = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

comme somme de six intégrales. Les valeurs des intégrales I et J sont elles identiques ?

Les intégrales s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{-1}\left(\int_{-y-3}^{y+3} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0}\left(\int_{-y-3}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y+3} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &+ \int_{0}^{1}\left(\int_{\frac{y-6}{2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{-\frac{y-6}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{1}^{6}\left(\int_{\frac{y-6}{2}}^{-\frac{y-6}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ J &= \int_{-3}^{-1}\left(\int_{-x-3}^{2x+6} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-3}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2x+6} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{0}^{1}\left(\int_{x-3}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{-2x+6} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3}\left(\int_{x-3}^{-2x+6} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Comme la fonction f est supposée continue, c'est une condition suffisante pour que les deux intégrales aient la même valeur.

4. Si $f(x,y) = y$ laquelle faut il choisir pour effectuer le calcul ? **Le calcul explicite n'est pas demandé !**

Il faut calculer J pour faire disparaitre les racines carrées.

La solution sera mise en ligne peu de temps après la fin de l'épreuve.