Université de Rennes1 **Année 2005/2006**

Outils Mathématiques 4

Corrigé du Devoir n^{0}1

Exercice 1 L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$.

Solution :

1. Un point $M \in \mathbb{R}^3$ vérifie équation $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe un scalaire λ tel que $\vec{AM} = \lambda\vec{AB}$, autrement dit les points A, B, et M sont alignés. Conclusion : l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$ est la droite passant par les points A et B.
2. Un raisonnement semblable au précédent, nous montre que l'ensemble de tels points M est la droite passant par les points A et B.

   On pourrait aussi utiliser les propriétés du produit vectoriel pour déduire de 1. le résultat : en effet, on écrit $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM}$ puis on remplace $\vec{BM}$ par $\vec{BA} + \vec{AM}$ dans $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$; on obtient

   $$\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{AM} \wedge \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{AM} \wedge \vec{BA} + \vec{AM} \wedge \vec{AM}$$

   Comme, $\vec{AM} \wedge \vec{AM} = \vec{0}$ et que $\vec{BA} = -\vec{AB}$, on a en fait $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = -\vec{AM} \wedge \vec{AB}$, par suite $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$ est équivalent à $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$. Par suite, les questions 1. et 2. sont équivalentes.

   remarque : Si $A = B$, alors $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$ devient $\vec{AM} \wedge \vec{0} = \vec{0}$, ce qui est toujours vrai donc l'ensemble des solutions est l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier .

Exercice 2

(I) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions.

1. Établir l'identité
$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 + \|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = 2(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2).$$
2. Montrer que pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que
$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2.$$

(II) Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ et $\vec{D}$ des vecteurs de l'espace à trois dimensions.
Établir l'identité :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C} \wedge \vec{D}) = \text{dét}\begin{pmatrix} \vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C} \\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D} \end{pmatrix}.$$

En déduire que :

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2.\|\vec{B}\|^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2.$$

Solution : (I)

1. On a d'une part, $\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = (\vec{U} + \vec{V}).(\vec{U} + \vec{V}) = \vec{U}.\vec{U} + 2\vec{U}.\vec{V} + \vec{V}.\vec{V} = \|\vec{U}\|^2 + 2\vec{U}.\vec{V} + \|\vec{V}\|^2$ et d'autre part $\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = (\vec{U} - \vec{V}).(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}.\vec{U} - 2\vec{U}.\vec{V} + \vec{V}.\vec{V} = \|\vec{U}\|^2 - 2\vec{U}.\vec{V} + \|\vec{V}\|^2$ d'où $\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 + \|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = 2(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2)$.

2. Maintenant, $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{U}.\vec{V}=0$, et en utilisant la relation $\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2+2\vec{U}.\vec{V}+\|\vec{V}\|^2$ on obtient que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2+\|\vec{V}\|^2.$$

(II) L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\vec{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\vec{C}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\vec{D}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}.$$

Un calcul direct nous donne, d'une part :

$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$ et $\vec{C}\wedge\vec{D}=\begin{pmatrix}c_2d_3-c_3d_2\\c_3d_1-c_1d_3\\c_1d_2-d_2d_1\end{pmatrix}$

d'où

$$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (a_3b_1-a_1b_3)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-d_2d_1). \quad \textbf{(*)}$$

D'autre part, $\vec{A}.\vec{C}=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$, $\vec{A}.\vec{D}=a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3$, $\vec{B}.\vec{C}=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3$ et $\vec{B}.\vec{D}=b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3$

d'où

$$\begin{aligned}\text{dét}\begin{pmatrix}\vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C}\\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D}\end{pmatrix} &= (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D}) \qquad \textbf{(**)}\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3).\end{aligned}$$

Le développement des expressions **(*)** et **(**)** nous donne la même expression, à savoir :

$$\begin{aligned}&a_1c_1b_2d_2+a_1c_1b_3d_3+a_2c_2b_1d_1\\&+a_2c_2b_3d_3+a_3c_3b_1d_1+a_3c_3b_2d_2\\&-b_1c_1a_2d_2-b_1c_1a_3d_3-b_2c_2a_1d_1\\&-b_2c_2a_3d_3-b_3c_3a_1d_1-b_3c_3a_2d_2.\end{aligned}$$

Donc, on a bien

$$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D}) = \text{dét}\begin{pmatrix}\vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C}\\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D}\end{pmatrix}.$$

En particulier, si $\vec{A}=\vec{C}$ et $\vec{B}=\vec{D}$ l'identité précédente s'écrit :

$$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|^2 = (\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \text{dét}\begin{pmatrix}\vec{A}.\vec{A} & \vec{B}.\vec{A}\\ \vec{A}.\vec{B} & \vec{B}.\vec{B}\end{pmatrix} = \text{dét}\begin{pmatrix}\|\vec{A}\|^2 & \vec{B}.\vec{A}\\ \vec{A}.\vec{B} & \|\vec{B}\|^2\end{pmatrix} = \|\vec{A}\|^2.\|\vec{B}\|^2-(\vec{A}.\vec{B})^2.$$

Remarques : 1) On peut établir l'identité précédente en utilisant le résultat de l'exercice 1.7 :

$$\vec{B}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{B}.\vec{D})\vec{C}-(\vec{B}.\vec{C})\vec{D}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D}) &= \vec{A}.(\vec{B}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D}))\\ &= \vec{A}.((\vec{B}.\vec{D})\vec{C}-(\vec{B}.\vec{C})\vec{D}) = (\vec{B}.\vec{D})(\vec{A}.\vec{C})-(\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})\\ &= \text{dét}\begin{pmatrix}\vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C}\\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2) Si θ est l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$, alors $|\vec{A}.\vec{B}| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.|\cos\theta|$, d'où

$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2.\|\vec{B}\|^2-(\vec{A}.\vec{B})^2 = \|\vec{A}\|^2.\|\vec{B}\|^2-(\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.|\cos\theta|)^2 = \|\vec{A}\|^2.\|\vec{B}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\vec{A}\|^2.\|\vec{B}\|^2\sin^2\theta$ et on retrouve ainsi la formule : $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.|\sin\theta|$.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et tracer les courbes de niveau $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f ;$ tel que $f(x,y) = k\}$ pour les valeurs de k indiquées :

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}, \qquad k = 0, -1$$
$$f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \qquad k = 1, 2$$
$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \qquad k = 2$$
$$f(x,y) = x - y - |x-y|, \qquad k \in \mathbb{R},$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k = 0$ et $k > 0$ et $k < 0$.

Solution :

$\boxed{\textbf{A)}}$ $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$

Le domaine de définition de f est l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le dénominateur $x+y^2$ ne s'annule pas, donc $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}, x \neq -y^2\}$.

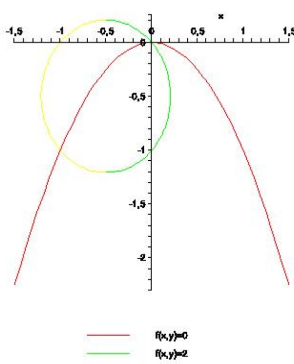
(i) $k = 0$

$f(x,y) = 0$ s'écrit $\frac{x^2+y}{x+y^2} = 0$ ce qui est équivalent à $x^2 + y = 0$, donc la courbe de niveau $k = 0$ est la parabole d'équation $y = -x^2$, moins les points $(0,0)$ et $(1,-1)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{D}_f$.

(ii) $k = -1$

$f(x,y) = -1$ s'écrit $\frac{x^2+y}{x+y^2} = -1$ ce qui est équivalent à $x^2 + y = -x - y^2$, ou bien $(x^2+x)+(y^2+y) = 0$.

On écrit $x^2 + x = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ et $y^2 + y = (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, d'où $(x^2+x)+(y^2+y) = 0$ devient $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, donc la courbe de niveau $k = -1$ est le cercle de centre $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, moins les points $(0,0)$ et $(1,-1)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{D}_f$.

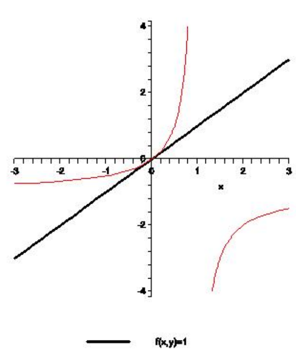


$\boxed{\textbf{B)}}$ $f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}$

Le domaine de définition de f est l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le dénominateur xy ne s'annule pas, donc $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}, xy \neq 0\}$.

(i) $k = 1$

$f(x,y) = 1$ s'écrit $\frac{xy-x+y}{xy} = 1$ ce qui est équivalent à $xy - x + y = xy$ donc la courbe de niveau $k = 1$ est la droite d'équation $y = x$, moins le point $(0,0)$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.



(ii) $k = 2$

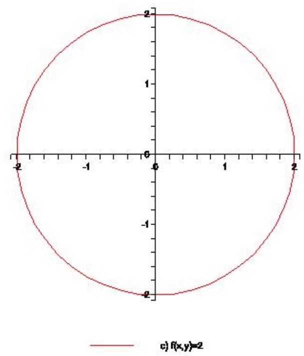
$f(x, y) = 2$ s'écrit $\frac{xy-x+y}{xy} = 2$ ce qui est équivalent à $xy - x + y = 2xy$ ou bien $-x + y - xy = 0$, ce qui est équivalent à $y = \frac{x}{1-x}$, donc la courbe de niveau $k = 2$ est le graphe de $y = \frac{x}{1-x}$ moins le point $(0, 0)$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.

C) $f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$

Le domaine de définition de f est l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels le dénominateur $8 - x^2y^2$ ne s'annule pas, donc $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}, x^2y^2 \neq 8\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}, |xy| \neq 2\sqrt{2}\}$.

(i) $k = 2$

$f(x, y) = 1$ s'écrit $\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} = 2$ ce qui est équivalent à $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 16$ ce qui revient à $(x^2 + y^2)^2 = 16$ ou même mieux est équivalent à $x^2 + y^2 = 4$ donc la courbe de niveau $k = 2$ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.



D) $f(x, y) = x - y - |x - y|$

La fonction f est définie partout, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

(i) $k = 0$

$f(x, y) = 0$ s'écrit $x - y - |x - y| = 0$ ce qui est équivalent à $x - y = |x - y|$ mais ceci est équivalent à $x - y \geq 0$ donc la courbe de niveau $k = 0$,(qui n'est pas une courbe), est le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y\}$.

(ii) $k > 0$

$f(x, y) = k$ s'écrit $x - y - |x - y| = k$ comme $k > 0$ ceci entraîne que $x - y > |x - y|$ ce qui est impossible, donc il n'existe pas de couple (x, y) vérifiant cette condition, d'où les courbes de niveau pour $k > 0$ sont vides.

(iii) $k < 0$

$f(x, y) = k$ s'écrit $x - y - |x - y| = k$ comme $k < 0$, ceci entraîne que $x - y < |x - y|$, ce qui impose la condition $x - y < 0$, par suite $|x - y| = -(x - y)$, dans ce cas la condition $x - y - |x - y| = k$ devient $2x - 2y = k$, donc les courbes de niveau $k < 0$ sont les droites d'équation $2x - 2y - k = 0$.