Feuille d'exercices numéro 5 : Fonctions à plusieurs variables, extrêma

Corrections des exercices 1, 12 et 13

Exercice 1

Déterminer les développements de Taylor à l'ordre précisé pour les fonctions suivantes au voisinage des points précisés :

1) $f(x,\ y) = \sin(x/y)$ à l'ordre 2 au voisinage du point $(\pi/2, 1)$
2) $f(x,\ y) = (1+x)\ /\ (1+x^2+y^4)$ à l'ordre 2 au voisinage de l'origine,
3) $f(x,\ y) = \ln(x^2+y^2)$ à l'ordre 3 au voisinage du point $(1,\ 0)$,
4) $f(x,\ y) = 1/(2+x-2y)$ à l'ordre 3 au voisinage du point $(2,\ 1)$.

Solution:

Rappel : Soient $f(x,y)$ une fonction de deux variables de classe C^2 au voisinage du point $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Le développement limité à l'ordre 2 de f au point $P_0 = (x_0, y_0)$ est donné par :

$$f(x,y) = f(P_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}P_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y-y_0)^2\right)+\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\epsilon(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$.

1) Pour $f(x,y) = \sin(\frac{x}{y})$ le calcul des dérivées partielles nous donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos(\frac{x}{y})}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x\cos(\frac{x}{y})}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{-\sin(\frac{x}{y})}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{-x^2\sin(\frac{x}{y})}{y^4} + \frac{2x\cos(\frac{x}{y})}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x\sin(\frac{x}{y})}{y^3} - \frac{\cos(\frac{x}{y})}{y^2}$$

En particulier, au point $(x_0, y_0) = (\pi/2, 1)$, on aura

$$f(\pi/2, 1) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2,1) = \frac{\cos(\pi/2)}{1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2,1) = \frac{-\pi/2\cos(\pi/2)}{1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\pi/2,1) = \frac{-\sin(\pi/2)}{1^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\pi/2,1) = \frac{-(\pi/2)^2\sin(\pi/2)}{1^4} + \frac{2(\pi/2)\cos(\pi/2)}{1^3} = \frac{-\pi^2}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi/2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\pi/2,1) = \frac{\pi/2\sin(\pi/2)}{1^3} - \frac{\cos(\pi/2)}{1^2} = \frac{\pi}{2}$$

En remplaçant les valeurs des dérivée partielles dans la formule de Taylor on obtient,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + \frac{1}{2}(-(x-\frac{\pi}{2})^2 + 2(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2})(y-1) - \frac{\pi^2}{4}(y-1)^2) + \left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\epsilon(x,y) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})(y-1) - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2 + \left((x-\frac{\pi}{2})^2+(y-1)^2\right)\epsilon(x,y) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}y\right)^2 + \left((x-\frac{\pi}{2})^2+(y-1)^2\right)\epsilon(x,y) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},1)} \epsilon(x,y) = 0$.

2) On va obtenir le développement de $f(x,y) = \frac{1+x}{1+x^2+y^4}$, sans calcul des dérivées partielles. On va commencer par le développement de la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{1+x^2+y^4}$ au voisinage de $(0,0)$ en utiliser le développement limité de la fonction d'une variable $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 2, on rappel que

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\epsilon(u) \text{ avec } \lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$$

En posant $u = x^2 + y^4$, on aura $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^4 = 0$, et en remplaçant u par $x^2 + y^4$, et en ne gardant que les termes de degré ≤ 2 on obtient

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^4} = 1 - x^2 + reste$$

Par suite, en ne gardant que les termes de degré ≤ 2, on aura

$$f(x,y) = \frac{1+x}{1 + x^2 + y^4} = (1+x)(1-x^2) + \left(x^2+y^2\right)\epsilon_1(x,y) = 1 + x - x^2 + \left(x^2+y^2\right)\epsilon(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \epsilon(x,y) = 0$.

3) On doit développer $f(x,\ y) = \ln(x^2 + y^2)$ à au voisinage du point $(1,0)$. On écrit alors $x = (x-1)+1$, $y = y$, de sorte que lorsque (x,y) tends vers $(1,0)$, le point $(x-1,y)$ tend vers $(0,0)$. La fonction $f(x,y)$ s'ecrie alors $f(x,y) = \ln(x^2+y^2) = \ln((x-1)+1)^2 + y^2) = \ln(1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + y^2)$. On va utliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction d'une variable

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\epsilon(u) \text{ avec } \lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$$

En posant $u = 2(x-1) + (x-1)^2 + y^2$, on aura $\lim_{(x,y)\to(1,0)} u = \lim_{(x,y)\to(1,0)} 2(x-1) + (x-1)^2 + y^2 = 0$, et en remplaçant u par $2(x-1) + (x-1)^2 + y^2$, et en ne gardant que les termes de degré ≤ 3 on obtient

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) = \ln(1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + y^2)$$

$$= (2(x-1)+(x-1)^2+y^2) - \frac{(2(x-1) + (x-1)^2 + y^2)^2}{2} + \frac{(2(x-1) + (x-1)^2 + y^2)^3}{3} + \left((x-1)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon_1(x,y)$$

$$= 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)y^2 + \left((x-1)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \epsilon(x,y) = 0$.

4) On va développer $f(x,y) = \dfrac{1}{2+x-2y}$ à l'ordre 3 au voisinage du point $(2,\ 1)$ On écrit pour cela $x = (x-2)+2$, $y = (y-1)+1$, de sorte que lorsque (x,y) tends vers $(2,1)$, le point $(x-2,y-1)$ tend vers $(0,0)$.
La fonction $f(x,y)$ s'ecrie alors $f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y} = \frac{1}{2+((x-2)+2)-2((y-1)+1)} = \frac{1}{2+(x-2)-2(y-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{(x-2)}{2}-(y-1)}$.
On va utliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction d'une variable

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u) \text{ avec } \lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$$

En posant $u = \frac{(x-2)}{2} - (y-1)$, on aura $\lim_{(x,y)\to(2,1)} u = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)}{2} - (y-1) = 0$, et en remplaçant u par $\frac{(x-2)}{2} - (y-1)$, et en ne gardant que les termes de degré ≤ 3 on obtient

$$f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{(x-2)}{2}-(y-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{(x-2)}{2}-(y-1))}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - (\frac{(x-2)}{2} - (y-1)) + (\frac{(x-2)}{2} - (y-1))^2 - (\frac{(x-2)}{2} - (y-1))^3\right) + \left((x-2)^2 + (y-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon_1(x,y)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(y-1)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(x-2)(y-1)}{2} + \frac{(y-1)^2}{2}$$

$$- \frac{(x-2)^3}{16} + \frac{3(x-2)^2(y-1)}{8} - \frac{3(x-2)(y-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^3}{2} + \left((x-2)^2 + (y-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \epsilon(x,y) = 0$.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x,\ y) = \exp(x-y) - x - y - 1$. La relation $f(x,\ y) = 0$ définie-t-elle au voisinage de l'origine une fonction implicite $y = \phi(x)$ satisfaisant à la relation $f(x,\ \phi(x)) = 0$ pour x appartenant à un certain voisinage de 0 ? Dans le cas affirmatif, calculer le développement limité à l'ordre deux de la fonction ϕ au voisinage de 0.

Exercice 3

Même questions que l'exercice précédent avec la fonction $f(x,\ y) = \arctan(xy) - \exp(x+y) + 1$ au voisinage de l'origine.

Exercice 4

Même questions que l'exercice 2 pour la fonction $f(x,\ y) = x \exp y - y + 1$ au voisinage du point $(-1, 0)$.

Exercice 5

Montrer que l'équation

$$x + 2y + z + \exp(2z) = 1$$

admet une solution de la forme $z = f(x,\ y)$ au voisinage du point $(x,\ y) = (0, 0)$ où $f(\mathrm{O},\ 0) = 0$. Déterminer une approximation polynomiale de degré 2 de f au voisinage de $(0, 0)$ en puissances de x et y.

Exercice 6

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs dont le produit est égal à 1. Déterminer si leurs somme passe par un extremum.

Exercice 7

Étudier au voisinage de l'origine le signe des fonctions suivantes :
$f(x,\ y) = x^2 - y^2 + x^3 + y^3$; $g(x,\ y) = x^2 + y^2 + x^3 + 3xy^2 + y^3$; $h(x,\ y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3$;

Exercice 8

Trouver l'équation du plan tangent à la surface définie par le graphe de la fonction : $f(x,\ y) = x^2 - y^2$ au point $(a,\ a,\ 0)$.

Exercice 9

Même question avec la surface : $S = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / xyz = 1\}$ au point (2,1,1/2).

Exercice 10

Trouver tous les points P situés sur la surface $S = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / 2x^2 - y^2 + z^2 = 25\}$ pour lesquels le plan tangent $T_P S$ est orthogonal à l'axe Oz.

Exercice 11

Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas d'extrémum local en l'origine :

$$f(x,\ y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2\ ;\ g(x,\ y) = x(x^2 + y^2 - 2x)\ ;$$

Rappel :

Définition 0.1. *On dit que le point $P_0 = (x_0, y_0)$ est un* **point critique** *de la fonction f si $\nabla f(P_0) = \vec{O}$ qui se traduit par*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Définition 0.2. *Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point $P_0 = (x_0, y_0)$. On appelle* **Hessienne** *de f au point P_0 la matrice*

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$$

On appelle **Hessien** *de f au point P_0 le déterminant de la matrice Hessienne :*

$$D(P_0) = det H_f(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)\right)^2$$

La condition suffisante sur les extrema va s'exprimer en terme de Hessien de f :

Théorème 0.3. *Soit P_0 un* **point critique** *d'une fonction $f(x,y)$ de classe C^2.*
On pose $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)$, $D = AC - B^2$.

1. *si $D > 0$ et $A > 0$, alors f présente un minimum local au point P_0.*
2. *si $D > 0$ et $A < 0$, alors f présente un maximum local au point P_0.*
3. *si $D < 0$, alors f présente un point selle au point P_0.*

Remarque 0.4. *Le théorème ne permet pas de conclure si $D = 0$ (une étude supplémentaire est nécessaire).*

Exercice 12

Déterminer et étudier les extrémum des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;\ f(x,y) = xy + \ln(1+y);\ \ f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3;$$

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(x+y);\ \ f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2;$$

Solution:

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

La première équation nous donne $y = x^2$ et en remplaçant y par x^2 dans la seconde équation, on obtient $x^4 = x$, qui a pour solution $x = 0$ ou $x = 1$.

Ainsi, les deux points critiques sont $P_0 = (0,0)$ et $P_1 = (1,1)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 16x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

i) Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(0,0) = -36 < 0,$$

D'où P_0 est un point-selle.

ii) Pour P_1 on trouve :

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

On a

$$D = \det H_f(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0,\ \text{et}\ A = 6 > 0$$

Donc P_1 est un point de **minimum local** pour f.

Remarque 0.5. *Comme* $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, *$f$ n'admet pas d'extrema globaux.*

2) $f(x,y) = xy + \ln(1+y)$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{1+y} = 0 \end{cases}$$

D'où, l'unique point critique de f est $P_0 = (0,0)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{(1+y)^2} \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(0,0) = -1 < 0,$$

Donc P_0 est un **point-selle.**

3) $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} ① \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \\ \\ ② \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

La somme des deux équations ① + ② donne $6(x+y)^2 = 0$, d'où $y = -x$, en remplaçant y dans l'équation ①, on trouve $4x = 0$. D'où l'unique point critique de f est $P_0 = (0,0)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6(x+y) & -2+6(x+y) \\ -2+6(x+y) & 2+6(x+y) \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(0,0) = 4-4 = 0,$$

et donc on peut rien déduire a priori sur la nature du point critique (le théorème du cours ne s'applique pas). On regarde f le long des direction $y = x$ et $y = -x$:

$$f(x,\ x) = 8x^3$$

$$f(x,\ -x) = 4x^4$$

On peut facilement vérifier que $f(x,\ -x) = 4x^4$ admet un minimum en $x = 0$ et $f(x,x)$ admet un point d'inflexion (point critique qui est ni minimum ni maximum) en $x = 0$. Comme la fonction admet des comportement différentes le long des deux directions, P_0 ne peut pas être ni un maximum ni un minimum pour f. Donc P_0 est un **point-selle**.

4) $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y) + \sin(x+y)$
On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} ① \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) + \cos(x+y) = 0 \\ \\ ② \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(y) + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

La différences des deux équations ① - ② donne $\sin(y) = \sin(x)$, d'où $y = x + 2k\pi$ ou $y = \pi - x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\underline{1^{er} \text{ cas} : y = x + 2k\pi}$ en remplaçant y dans l'équation ① on a $-\sin(x) + \cos(2x) = 0$, comme $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, on doit résoudre $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$, en posant $X = \sin(x)$, l'équation devient $2X + X - 1 = 0$. Le discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, d'où les solution $\frac{-1+\sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{9}}{4} = -1$.

1) Si $\sin(x) = \frac{1}{2}$, alors $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On a deux cas à étudier
   a) si $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ alors $y = \frac{\pi}{6} + 2l\pi$, $(k,l \in \mathbb{Z})$.
   b) si $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ alors $y = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, $(k,l \in \mathbb{Z})$.
2) Si $\sin(x) = -1$, alors $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $y = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad (k,l \in \mathbb{Z})$.

$\underline{2^{nd} \text{ cas} : y = \pi - x + 2k\pi}$ en remplaçant y dans l'équation ① on a $-\sin(x) + \cos(\pi) = 0$, c-à-d $\sin(x) = -1$, d'où $x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ et $y = \pi - x + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2(k-k')\pi = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$

Conclusion : Les points critiques de f sont de l'un des 3 types :
i) $(x,y) = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2l\pi) \quad (k,l \in \mathbb{Z})$.
ii) $(x,y) = (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2l\pi) \quad (k,l \in \mathbb{Z})$.
iii) $(x,y) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2l\pi) \quad (k,l \in \mathbb{Z})$.
On va maintenant déterminer la nature de chaque type de points critiques.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\cos(y) - \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

i) Pour $P = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2l\pi)$ on a

$$H_f(P) = H_f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(P) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0,$$

et $A = -1 < 0$ donc le point $P = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2l\pi)$ est un un point de **maximum local** pour f.

ii) Pour $P = (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2l\pi)$ on a

$$H_f(P) = H_f(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(P) = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0,$$

et $A = \sqrt{3} > 0$ donc le point $P = (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2l\pi)$ est un un point de **minimum local** pour f.

iii) Pour $P = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2l\pi)$ on a

$$H_f(P) = H_f(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(P) = 0,$$

et donc on peut rien déduire a priori sur la nature du point critique (le théorème du cours ne s'applique pas). On regarde f le long des direction $y = x$

$$f(x, x) = 2\cos(x) + \sin(2x) = 2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)(1 + \sin(x))$$

Comme $1 + \sin(x) \geq 0$, le signe de $f(x, x)$ est égale à celui de $\cos(x)$, mais $\cos(x)$ s'annule en $x = -\frac{\pi}{2}$ et change de signe au voisinage de $x = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi la fonction f change de signe, par suite P ne peut pas être ni un maximum ni un minimum pour f. Donc P est un **point-selle**.

5) $f(x, y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} ① \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -y\sin(x) - \cos(x) = 0 \\ ② \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \cos(x) = 0 \end{cases}$$

La somme des deux équations ① + ② donne $y(2 - \sin(x)) = 0$, comme $\sin(x) \neq 2$ on a $y = 0$ et en remplaçant y par 0 dans ① on aura $\cos(x) = 0$ et par suite $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Donc les points critiques de f sont les points $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$ ou $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y\cos(x) + \sin(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & 2 \end{pmatrix}$$

i) Pour $P = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$ on a

$$H_f(P) = H_f(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(P) = 2 - 1 = 1,$$

et $A = 1 > 0$ donc le point $P = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$ est un un point de **minimum local** pour f.

ii) Pour $P = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$ on a

$$H_f(P) = H_f(-\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$D = \det H_f(P) = -2 - 1 = -3 < 0,$$

donc le point $P = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$ est un **point-selle** pour f.

Exercice 13

Soit α un nombre réel, on considère la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1+\alpha^2x^2+y^2}$. Déterminer les valeurs de α pour que la fonction f admette un minimum local en l'origine.

Solution: Par définition, f admet un minimum local (respectivement global) en $(0, 0)$ si $f(x, y) - f(0, 0) \geq 0$ dans un voisinage de $(0, 0)$ (respectivement pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

Comme, $f(0, 0) = -1$, on a $f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1+\alpha^2x^2+y^2} + 1 = x^2 + xy + y^2 + \frac{\alpha^2x^2+y^2}{1+\alpha^2x^2+y^2}$.

Comme $\frac{\alpha^2x^2+y^2}{1+\alpha^2x^2+y^2} \geq 0$, il s'ensuit que $f(x, y) - f(0, 0) \geq x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$

Ainsi pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) - f(0, 0) \geq 0$, d'où $(0, 0)$ est un minimum global, donc aussi un minimum local, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 14

Trouver et classifier les points critiques de la fonction $z = f(x,\ y)$ qui satisfait à l'équation implicite

$$\exp(2zx - x^2) - 3\exp(2zy + y^2) = 2.$$

Exercice 15

Déterminer tous les extréma locaux et globaux ainsi que les points selles de la fonction $f(x,\ y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le domaine : $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$

Exercice 16

Même questions que l'exercice précédent avec la fonction : $f(x,\ y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ et le domaine : $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/\ -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 17

Même question que l'exercice 15 pour la fonction $f(x,\ y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$ et le domaine : $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 18

Même question que l'exercice 15 mais pour la fonction $f(x,\ y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ et le domaine : $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ et } 0 \leq x + y \leq \pi\}$.

Exercice 19

Trouver les extréma de la fonction $f(x,\ y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $3x^2 + 2xy + 5y^2 = 72$.

Exercice 20

Même question que l'exercice précédent avec la fonction $f(x,\ y) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz = 1$.

Exercice 21

Même question que l'exercice 14 mais pour la fonction $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$ et les deux contraintes $x + y + z = 1$ et $xy = 1$.

Exercice 22

La température sur la sphère $S = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ est décrite par la fonction $f(x,\ y,\ z) = 2 + xz + y^2$. Déterminer les points les plus chauds et les plus froids.

Exercice 23

Soient des nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots a_n$, on appelle inégalité arithmético-géométrique l'inégalité :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ \ + a_n)$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer cette inégalité.

1) Déterminer la valeur maximale de la fonction $f(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n) = x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2$ sur la sphère $S = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n/x_1^2 + x_2^2 + \ \ + x_n^2 = r^2\}$ de rayon r. Expliquer l'existence de cette valeur maximale (*hors programme*).

2) Déduire de la question précédente l'inégalité :

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 \leq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^n$$

3) Conclure.