Feuille d'exercices numéro 3 : Fonctions à plusieurs varaibles, dérivabilitée

Correction de quelques exercices non traités en TD

Exercice 1

On rappelle que pour une fonction $z = f(x,\ y)$ définie sur le plan ou une partie de celui ci, on définit formellement les accroissements partiels par :

$$\triangle_x Z = f(x + \triangle x, y) - f(x, y)\ ,\ \triangle_y z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y)\ ,$$

et l'accroissement total part :

$$\triangle z = f(x + \triangle x,\ y + \triangle y) - f(x, y)\ ,$$

ce qui se généralise à des fonctions de plus de deux variables. Déterminer les accroissements partiels et totaux de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^2 + y^2,\ f(x, y) = \exp(\frac{x^2 + y^2}{2}),\ f(x, y) = \cos x \sin y,\ f(x, y) = \sin(xy).$$

Solution:

1. Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, on aura :

$$\triangle_x Z = f(x+\triangle x, y) - f(x, y) = (x+\triangle x)^2 + y^2 - (x^2+y^2) = x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + y^2 - x^2 - y^2 = 2x\triangle x + (\triangle x)^2.$$

Comme f est symétrique $f(x, y) = f(y, x)$, on obtient en échangeant les rôles de x et y on obtient

$$\triangle_y Z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y) = 2y\triangle y + (\triangle y)^2.$$

Enfin, $\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y) = (x + \triangle x)^2 + (y + \triangle y)^2 - (x^2 + y^2)$
$= (x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2) + (y^2 + 2y\triangle y + (\triangle y)^2) - (x^2 + y^2) = 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + 2y\triangle y + (\triangle y)^2$

2. Pour $f(x,\ y) = \exp(\frac{x^2+y^2}{2})$ on aura :
$\triangle_x Z = f(x + \triangle x, y) - f(x, y) = \exp(\frac{(x+\triangle x)^2+y^2}{2}) - \exp(\frac{x^2+y^2}{2}) = \exp(\frac{x^2+2x\triangle x+(\triangle x)^2+y^2}{2}) - \exp(\frac{x^2+y^2}{2})$
$= \exp(\frac{x^2+y^2}{2}) \left(\exp(\frac{2x\triangle x+(\triangle x)^2}{2}) - 1\right).$
Comme f est symétrique $f(x, y) = f(y, x)$, on obtient en échangeant les rôles de x et y on obtient

$$\triangle_y Z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y) = \exp(\frac{x^2 + y^2}{2}) \left(\exp(\frac{2y\triangle y + (\triangle y)^2}{2}) - 1\right).$$

Enfin, $\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y) = \exp(\frac{(x+\triangle x)^2+(y+\triangle y)^2}{2}) - \exp(\frac{x^2+y^2}{2})$
$= \exp(\frac{(x^2+2x\triangle x+(\triangle x)^2)+(y^2+2y\triangle y+(\triangle y)^2)}{2}) - \exp(\frac{x^2+y^2}{2}) = \exp(\frac{x^2+y^2}{2}) \left(\exp(\frac{2x\triangle x+(\triangle x)^2+2y\triangle y+(\triangle y)^2}{2}) - 1\right).$

3. Pour $f(x, y) = \cos x \sin y$, on aura :

$$\triangle_x Z = f(x + \triangle x, y) - f(x, y) = \cos(x + \triangle x) \sin y - \cos x \sin y = (\cos(x + \triangle x) - \cos x) \sin y.$$

$$\triangle_y Z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y) = \cos x. \sin(y + \triangle y) - \cos x \sin y = \cos x.(\sin(y + \triangle y) - \sin y).$$

Enfin, $\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y) = \cos(x + \triangle x) \sin(y + \triangle y) - \cos x \sin y.$

4. Pour $f(x, y) = \sin(xy)$, on aura :

$$\triangle_x Z = f(x + \triangle x, y) - f(x, y) = \sin((x + \triangle x)y) - \sin(xy).$$

Comme f est symétrique $f(x, y) = f(y, x)$, on obtient en échangeant les rôles de x et y on obtient

$$\triangle_y Z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y) = \sin(x(y + \triangle y)) - \sin(xy).$$

Enfin, $\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y) = \sin((x + \triangle x)(y + \triangle y)) - \sin(xy)$
$= \sin(xy + (\triangle x)y + x(\triangle y) + (\triangle x)(\triangle y)) - \sin(xy)$

Exercice 2

Soit une fonction $z - f(x,\ y)$ différentiable au point $(x,\ y)$, on a :

$$\triangle z = f(x+\triangle x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y)\ ,$$

d'où

$$f(x+\triangle x,\ y+\triangle y) = f(x,\ y) + \triangle z.$$

Comme on a la formule approchée $\triangle z \approx dz$, on a :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\triangle y,$$

d'où la formule approchée :

$$f(x+\triangle x,\ y+\triangle y) \approx f(x,\ y) + \frac{\partial f}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\triangle y.$$

Utiliser cette formule pour obtenir de manière approchée le calcul du volume de matière nécessaire utilisé pour la fabrication d'un cylindre de faible épaisser dont les dimensions sont :

$-r$: rayon du cylindre intérieur,
$-h$: hauteur du cylindre intérieur,
$-k$: épaisseur des parois et du fond.

Appliquer la formule obtenue dans le cas $r = 4$ cm, $h = 20$ cm et $k = 0,1$ cm. Calculer l'erreur commise par cette méthode dans ce cas par rapport au résultat exact.

Solution:

Le volume d'un cylindre de rayon r est de hauteur h est égal à $\pi r^2 h$, cette formule définie une fonction polynomiale (donc de classe au moins C^1) des variables r et h, qu'on notera $f(r,h)$.

Alors, le volume V de matière nécessaire utilisée pour la fabrication du cylindre est égal à $f(r+k,h+k) - f(r,h)$ et la formule approchée nous donne

$$V = f(r+k,h+k) - f(r,h) \approx \frac{\partial f}{\partial r}\triangle r + \frac{\partial f}{\partial h}\triangle h$$

On a $\frac{\partial f}{\partial r}(r,h) = \frac{\partial \pi r^2 h}{\partial r} = \pi h \frac{\partial r^2}{\partial r} = 2\pi r h$ et $\frac{\partial f}{\partial h}(r,h) = \frac{\partial \pi r^2 h}{\partial h} = \pi r^2 \frac{\partial h}{\partial h} = \pi r^2$
Ainsi, $V = f(r+\triangle r, h+\triangle h) - f(r,h) \approx 2\pi r h \triangle r + \pi r^2 \triangle h$
Application numérique : on a $r = 4$ cm, $h = 20$ cm et $\triangle r = \triangle h = k = 0,1$ cm

1) La valeur approchée de V est égale à : $2\pi r h k + \pi r^2 k = 2\pi \times 4 \times 20 \times 0,1 + \pi \times 4^2 \times 0,1 = 55,29 cm^3$
2) La valeur exacte de V est $f(r+k,h+k) - f(r,h) = \pi(r+k)^2(h+k) - \pi r^2 h = \pi \times (4,1)^2 \times (20,1) - \pi \times 4^2 \times 20 = 56,17 cm^3$
3) L'erreure commise est alors égale à "la valeur exacte" - " la valeur approchée" $=56,17 - 55,29 = 0,88 cm^3$

Exercice 3

Calculer les dérivées partielles d'ordre un des fonctions suivantes :
$x^2(\sin y)^2, x^{y^2}, \exp(x^2+y^2+z^2)$, Arctang (xy) , $\mathrm{Arc}\sin(x+yz)$.

Exercice 4

Calculer les dérivées partielles de la fonction

$$f(x,\ y) = (x^2+y^2)\exp(\mathrm{xy})$$

et montrer que c'est une fonction de classe C^1.

Exercice 5

On considère la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/(x,\ y) \to f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,\ y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 \text{ si } (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Calculer les dérivées partielles de f en l'origine.
2) Montrer que f n'est pas de classe C^1.

Exercice 6

Soit la fonction f définie comme suit :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/(x,\ y)\to f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \text{ si } (x,\ y)\neq(0,0)\ ;\\ 0 \text{ si } (x,\ y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{y\to0} f(x,\ y))=\lim\limits_{y\to0}(\lim\limits_{x\to0} f(x,\ y))=0.$

2) Peut on en déduire que f admet une limite en l'origine ?

3) Calculer les dérivées partielles en l'origine.

4) La fonction f est t-elle de classe C^1 ?

Exercice 7

Soit la fonction f définie comme suit :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/(x,\ y)\to f(x,\ y)=\begin{cases}(x+y)^2\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} \text{ si } xy\neq0;\\ 0 \text{ si } xy=0.\end{cases}$$

1) Montrer que f admet une limite en l'origine.

2) Peut on en déduire que les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0} f(x,\ y_0)$ et $\lim\limits_{y\to0} f(x_0,\ y)$ existent pour tout x_0 ou y_0 constants ?

3) Calculer les dérivées partielles en l'origine de f.

4) Calculer les dérivées partielles en dehors de l'origine.

5) La fonction f est elle de classe C^1 ?

Solution:

1) Comme $|\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}| = |\cos\frac{1}{x}||\cos\frac{1}{y}| \leq 1$, alors $|f(x,y)| = |(x+y)^2\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}| \leq (x+y)^2$. On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)^2=(0+0)^2=0$, par conséquent le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ et donc f admet une limite à l'origine

2) On ne peut pas en déduire que ces limites existent : par exemple si $y_0=\frac{1}{2\pi}$, alors $f(x,y_0)=(x+2\pi)^2\cos\frac{1}{x}\cos(2\pi)=(x+2\pi)^2\cos\frac{1}{x}$, on a $\lim_{x\to0}(x+2\pi)^2=4\pi^2$, mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0

   on en déduit que $f(x,y_0)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

3) (a) On a $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{0-0}{x}=0$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$$

   (b) On a $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\dfrac{0-0}{y}=0$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$$

   (c) La différentielle de f à l'origine est l'application $(x,y)\mapsto(x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))=(x\times0,y\times0)=(0,0)$ c'est donc l'application nulle.

4) En un point (x,y) telle que $xy\neq0$, $f(x,y)=(x+y)^2\cos(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{y})$

   (a) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}((x+y)^2\cos(\dfrac{1}{x})\cos\dfrac{1}{y})=\cos(\dfrac{1}{y})\dfrac{\partial f}{\partial x}((x+y)^2\cos(\dfrac{1}{x}))$

   $=\cos(\dfrac{1}{y})(2(x+y)\cos(\dfrac{1}{x})+(x+y)^2(-\dfrac{1}{x^2}\sin(\dfrac{1}{x}))$

   ainsi $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(x+y)\cos(\dfrac{1}{y})(2\cos(\dfrac{1}{x})-(x+y)\dfrac{1}{x^2}\sin(\dfrac{1}{x}))}$

   (b) Comme $f(x,y)=f(y,x)$, pour calculer la dérivée partielle par rapport à y, il suffit d'échanger les variables x et y dans la formule de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $on obtient alors$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x+y)\cos(\frac{1}{x})(2\cos(\frac{1}{y})-(x+y)\frac{1}{y^2}\sin(\frac{1}{y}))}$$

5) La fonction f n'admet pas de limite en certains points elle n'est donc pas continue, par suite elle n'est pas de classe C^1.