Feuille d'exercices numéro 2 : Fonctions de plusieurs variables, limites et continuité

Correction de quelques exercices non traités en TD

Exercice 1

Donner l'ensemble de définition des la fonctions suivantes :
$f(x,\ y) = \ln(x+y)$, $f(x,\ y) = \sqrt{y-2x^2}$, $f(x,\ y) = \frac{\ln(\exp x - 1)}{\sqrt{x^2+y^2-3}}$,
$f(x,\ y) = \dfrac{x}{x^2-y^2}$, $f(x,\ y) = \dfrac{1}{\cos(x-y)}$, $f(x,\ y) = \dfrac{\ln(y-x^2)}{\sqrt{xy}}$.

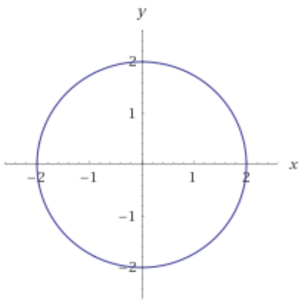
Exercice 2

Déterminer le domaine de définition et tracer les courbes de niveau pour les valeurs c indiquées pour les fonctions suivantes :
$f(x,\ y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, c = 0, 1/2$; $f(x,\ y) = x^2 - y^2, c = 0, 1$; $f(x,\ y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}, c = 0, -1$;
$f(x,\ y) = \dfrac{xy - x + y}{xy}, c = 1, 2$; $f(x,\ y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, c = 2$; $f(x,\ y) = x - y - |x-y|, c = -1, 0, 1$.

Solution:

5) $f(x,\ y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$, $c = 2$

Le domaine de définition de f est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 8 - x^2y^2 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (xy)^2 \neq 8\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(xy)^2} \neq \sqrt{8}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \neq 2\sqrt{2}\} = \mathbb{R}^2 - \{|xy| = 2\sqrt{2}\}$.
Le domaine de définition de f est le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ de la parabole d'équation $|xy| = 2\sqrt{2}$.

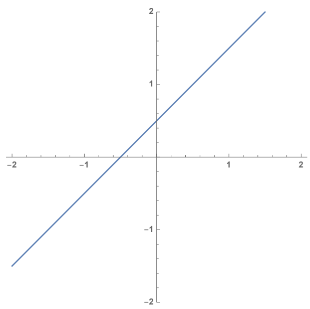


La courbe de niveau $f(x,y) = 2$ est d'équation $\dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} = 2$, ce qui donne $x^4 + y^4 = 16 - 2x^2y^2$ qu'on écrit $(x^2+y^2)^2 = 16$, en prenant la racine carrée on obtient $x^2 + y^2 = 4$, on reconnaît l'équation du cercle centré en l'origine et de rayon 2. Il faudrait retirer à ce cercle les points (x,y) pour lesquels $x^2y^2 = 8$, points qui ne sont pas dans le domaine de définition de f. Les points du cercle vérifiant cette relation vérifient : $x^2 + \frac{8}{x^2} = 4$ c-à-d $x^4 - 4x^2 + 8 = 0$ qu'on peut écrire sous la forme $(x^2-2)^2 + 4 = 0$. Mais $(x^2-2)^2 + 4 \geq 4 > 0$, d'où, l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
Donc on ne retire aucun points, ainsi la courbe de niveau $f(x,y) = 2$ est le cercle centré en l'origine et de rayon 2.

6) $f(x,\ y) = x - y - |x-y|$, $c = -1, 0, 1$
Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^2$.

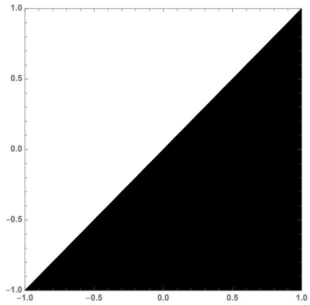
Rappel : $|x-y| = \begin{cases} x - y \ \textbf{si}\, x \geq y \\ -(x-y) \ \textbf{si}\, x \leq y \end{cases}$

i) La courbe de niveau $f(x,y) = -1$, est d'équation $x - y - |x-y| = -1$, alors si $x \geq y$, on aura $x - y - x + y = -1$, ce qui entraîne $0 = -1$ ce qui est absurde, donc cette partie est vide; maintenant si $x \leq y$, on aura $x - y + x - y = -1$, ce qui donne $2y = 2x + 1$ c-à-d $y = x + \frac{1}{2}$.
Ainsi $f(x,y) = -1$ est la droite $y = x + \frac{1}{2}$. (dans ce cas on a $x \leq y$.)



ii) La courbe de niveau $f(x,y)=0$, est d'équation $x-y-|x-y|=0$, alors si $x \geq y$, on aura $x-y-x+y=0$, ce qui entraîne $0=0$ ce qui est toujours vrai, donc cette partie est égale à l'ensemble des points (x,y) tels que $x \geq y$; maintenant si $x \leq y$, on aura $x-y+x-y=0$, ce qui donne $2y=2x$ c-à-d $y=x$. (qui est contenue dans la première partie)

Ainsi $f(x,y)=0$ est le demi-plan $x \geq y$.



iii) La courbe de niveau $f(x,y)=1$, est d'équation $x-y-|x-y|=1$, alors si $x \geq y$, on aura $x-y-x+y=1$, ce qui entraîne $0=1$ ce qui est absurde, donc cette partie est vide ; maintenant si $x \leq y$, on aura $x-y+x-y=1$, ce qui donne $2y=2x-1$ c-à-d $y=x-\frac{1}{2}$ mais alors $y<x$, donc pas de solution

Ainsi $f(x,y)=1$ est l'ensemble vide.

Exercice 3

Déterminer le domaine de définition, les courbes de niveaux à $c=0,1,-1,2,3$ dans chacun des cas suivants :

$$f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad f(x,\ y)=\frac{x}{y}.$$

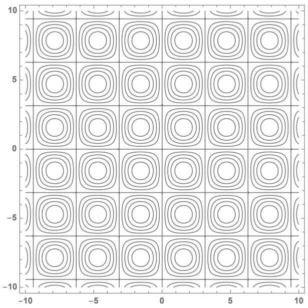
Solution:

1. Comme $x^2+y^2 \geq 0$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ est définie pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'où son domaine de définition $D_f=\mathbb{R}^2$.
   (a) $f(x,y)=0$ est équivalent à $x=y=0$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=0$ est l'ensemble $\{(0,0)\}$.
   (b) $f(x,y)=1$ est équivalent à $x^2+y^2=1$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=1$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1.
   (c) $f(x,y)=-1$ est équivalent à $x^2+y^2=-1$, qui n'a pas de solution, puisqu'un l'un est positif et l'autre négatif, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=-1$ est l'ensemble vide $\emptyset$.
   (d) $f(x,y)=2$ est équivalent à $x^2+y^2=2$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=2$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
   (e) $f(x,y)=3$ est équivalent à $x^2+y^2=3$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=3$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
2. $f(x,y)=\frac{x}{y}$ est définie si $y \neq 0$, ainsi domaine de définition $D_f=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0\}=\mathbb{R}^2-\{y=0\}$.
   (a) $f(x,y)=0$ est équivalent à $x=0$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=0$ est l'axe des y privé de l'origine (qui n'est pas dans D_f).
   (b) $f(x,y)=1$ est équivalent à $x=y$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=1$ est la droite d'équaation $y=x$ privé de l'origine.
   (c) $f(x,y)=-1$ est équivalent à $x=-y$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=-1$ est la droite d'équaation $y=-x$ privé de l'origine.
   (d) $f(x,y)=2$ est équivalent à $x=2y$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=2$ est la droite d'équaation $y=\frac{x}{2}$ privé de l'origine.
   (e) $f(x,y)=3$ est équivalent à $x=3y$, ainsi la courbe de niveau $f(x,y)=3$ est la droite d'équaation $y=\frac{x}{3}$ privé de l'origine.

Exercice 4

Soit la fonction $f(x,\ y) = \sin x \sin y$. Faire un dessin représentant toutes les courbes de niveaux de f.

Solution:



Exercice 5

Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{xy} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{|y|}$$

Exercice 6

Pour une fonction $z = f(x,\ y)$ on définit lorsqua cela est possible :

$$l = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,\ y)\ ,\ m = \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,\ y)),\ n = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,\ y))$$

En utilisant les fonctions :

$$f(x,\ y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ f(x,\ y) = \frac{xy}{x^2+y^2},\ f(x,\ y) = \frac{\sin x}{y},\ f(x,\ y) = \frac{\sin y}{x},$$

ainsi que le point $(a,\ b) = (0,0)$, montrer que l'on peut rencontrer les trois situations suivantes :

–Deux de ces trois limites existent mais pas la troisième.

–Une de ces trois limites existe sans que les deux autres existent.

–Les limites m et n existent mais sont distinctes.

Exercice 7

Étudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions définies comme suit :

$\forall (x,\ y) \neq (0,\ 0), f(x,\ y) = |\frac{x}{y}|$ et $f(0,\ 0) = 1$; $\forall (x,\ y) \neq (0,\ 0), f(x,\ y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ et $f(0,\ 0) = 0$

$$\forall (x,\ y) \neq (0,\ 0), f(x,\ y) = \frac{2x^2-y^2+4xy}{4x^2+y^2} \text{ et } f(0,\ 0) = 3\,;$$

$$\forall (x,\ y) \neq ((0,\ 0), f(x,\ y) = y \sin\frac{x}{y} \text{ et } f(0,\ 0) = 0.$$

Exercice 8

Déterminer si les fonctions suivantes peuvent être prolongées en l'origine :

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy},\ f(x,\ y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^3},\ f(x,\ y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ f(x,\ y) = \frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}.$$

Solution: On rappelle que pour prolonger une fonction f par continuité en un point (x_0, y_0) il faudrait montrer que la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0) existe.

1. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy}$.

   En passant en coordonnées polaires, tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est représenté par $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy} = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2(1+\cos\theta\sin\theta)} = r\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}$.

   On a $\cos\theta\sin\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}$ d'où $|\cos\theta\sin\theta| \leq \frac{1}{2}$ et par suite

$$\left|\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right| \leq \left|\frac{\cos\theta\sin\theta}{1-|\cos\theta\sin\theta|}\right| \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Alors $\lim_{r\to 0} r\left|\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right| \leq \lim_{r\to 0} 2r = 0$ on en déduit que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy} = \lim_{r\to 0} r\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta} = 0$$

donc f admet un prolongement par continuité en $(0,0)$ par $f(0,0)=0$.

2. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^3}$.

   En considérant les chemins $x=0$ puis $y=0$ on aura, $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^3} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$, comme ces deux limites sont différentes, la fonction $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^3}$ n'a pas de limite en $(0,0)$, par suite elle n'admet pas de prolongement par continuité en l'origine.

3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   On a $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$, comme ces deux limites sont différentes, la fonction $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$, par suite elle n'admet pas de prolongement par continuité en en l'origine.

4. $f(x,y) = \frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}$.

   En considérant les chemins $x=0$ puis la parabole $y=x^2$ on aura, $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$ On a $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^7}{x^6} = \lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{x^7+x^6+x^5}{x^6+x^5+x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5(x^2+x+1)}{x^5(2x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1}{2x+1} = 1$, comme ces deux limites sont différentes, la fonction $f(x,y) = \frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}$ n'a pas de limite en $(0,0)$, par suite elle n'admet pas de prolongement par continuité en l'origine.

Exercice 9

Soit la fonction f définie comme suit :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/(x,\ y)\to f(x,\ y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,\ y)\neq(0,0)\ ; \\ 0 \text{ si } (x,\ y)=0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de cette fonction.

Exercice 10

Comment faut il choisir le nombre réel α pour que la fonction définie comme suit :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/(x,\ y)\to f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \text{ si } (x,\ y)\neq(0,0)\ ; \\ \alpha \text{ si } (x,\ y)=0. \end{cases}$$

soit continue ?

Exercice 11

Montrer que la fonction définie comme suit :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/(x,\ y)\to f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y(y-x^2)} \text{ si } y(y-x^2)\neq 0; \\ 0 \text{ si } y(y-x^2)=0. \end{cases}$$

n'est pas continue en l'origine mais que ses restrictions à toute droite passant par $(0,0)$ sont continues.

Solution: Le but de l'exercice est de souligner qu'il ne suffit pas de montrer que la restriction d'une fonction à toute droite est continue en un point pour déduire qu'elle est continue en ce point.

1. Si on restreint f à la droite $y=\lambda x$, on aura $f(x,\lambda x) = \frac{x^4}{\lambda x(\lambda x-x^2)} = \frac{x^4}{\lambda x(\lambda x-x^2)} = \frac{x^2}{\lambda(\lambda-x)}$, alors

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\lambda(\lambda-x)} = 0 = f(0,0).$$

   Si on restreint f à la droite, à l'xe des y, $x=0$, on aura $f(0,y) = \frac{0}{y(y-0)} = 0$, ainsi $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = f(0,0)$.

   On a donc la restriction de f à toute droite est continue en $(0,0)$.

2. Mais, si on considère la parabole $y=2x^2$, on a $f(x,2x^2) = \frac{x^4}{2x^2(2x^2-x^2)} = \frac{x^4}{2x^2(2x^2-x^2)} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$, d'où

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,2x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$ D'où f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 12

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donner son domaine de définition et dire en le justifiant si elle admet ou non un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_1(x,\ y) = \frac{x+y}{x^2+y^2};\ f_2(x,\ y) = \frac{y}{x^2}\exp(-\frac{|y|}{x^2});\ f_3(x,\ y) = (x-5y)\sin(\frac{x}{x^2-y^2})$$

Solution: On rappelle que pour prolonger une fonction f par continuité en un point (x_0, y_0) il faudrait montrer que la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers (x_0, y_0) d existe.

1. $f_1(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ est définie si $x^2+y^2 \neq 0$ ce qui équivaut à $(x,y) \neq (0,0)$, ainsi son domaine de définition est $D_{f_1} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
   La fonction $f_1(x,y)$ est continue sur $D_{f_1} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, car c'est le quotient de deux polynômes (et le dénominateur ne s'annule pas).
   Maintenant, on considére l'origine $(0,0)$.
   Le long de la droite $y=0$, on $f(x,0) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, mais comme $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$, $f(x,y)$ n'a donc pas de limite en $(0,0)$, ainsi f n'admet pas de prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f_2(x,y) = \frac{y}{x^2}\exp(-\frac{|y|}{x^2})$ est définie si $x \neq 0$, ainsi son domaine de définition est $D_{f_2} = \mathbb{R}^2 - \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$. (le plan privé de laxe des y)
   La fonction $f_2(x,y)$ est continue sur D_{f_2}, car c'est produit et composition de fonctions continues.
   Il reste à étudier l'existence de la limite en un point qui est hors du domaine D_{f_2} c-à-d un point $(0, y_0)$.
   (a) 1er cas : $y_0 \neq 0$
   Dans ce cas $(x,y) \to (0,y_0)$ entraîne $\frac{|y|}{x^2} \to +\infty$, on aura alors en posant $t = \frac{|y|}{x^2}$
   $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} |f_2(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{|y|}{x^2}\exp(-\frac{|y|}{x^2}) = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, par le théorème des puissances comparées. Ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_2(x,y) = 0$ et donc f_2 admet un prolongement par continuité en $(0,y_0)$ en posant $f_2(0,y_0) = 0$.
   (b) 2nd cas : $y_0 = 0$
   Le long du chemin $y = x^2$ on a $f_2(x,x^2) = \frac{x^2}{x^2}\exp(-\frac{x^2}{x^2}) = e^{-1}$, d'où $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_2(x,y) = e^{-1}$
   et le long du chemin $y = x^3$ on a $f_2(x,x^3) = \frac{x^3}{x^2}\exp(-\frac{x^2|x|}{x^2}) = x\exp(-|x|)$,
   d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{x\to 0} x\exp(-|x|) = 0$. Comme $e^{-1} \neq 0$, la fonction $f_2(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$, at par suite f_2 n'admet pas pas de prolongement continu sur $(0,0)$.

   En conclusion, f_2 admet un prolongement par contnuité sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, mais pas sur $\mathbb{R}^2$.
3. $f_3(x,y) = (x-5y)\sin(\frac{x}{x^2-y^2})$ est définie si $x^2-y^2 \neq 0$, comme $x^2-y^2 = (x-y)(x+y) = 0$ est la réunion des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$, on en déduit que le domaine de définition de f_3 est le plan privé des droites $y = x$ et $y = -x$ c-à-d $D_{f_3} = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y \text{ ou } y = -x\}$.
   La fonction $f_3(x,y)$ est continue sur D_{f_3}, car c'est produit et composition de fonctions continues.
   Il reste à étudier l'existence de la limite en un point qui est hors du domaine D_{f_3} c-à-d un point du type (x_0, x_0) ou $(x_0, -x_0)$.
   (a) 1er cas : $x_0 = 0$ c-à-d $(x_0, y_0) = (0,0)$.
   On a $|f_3(x,y)| = \left|(x-5y)\sin\frac{x}{x^2-y^2}\right| = |(x-5y)|\left|\sin\frac{x}{x^2-y^2}\right| \leq |(x-5y)|$, car $\left|\sin\frac{x}{x^2-y^2}\right| \leq 1$. Puisque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |(x-5y)| = |0-0| = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 0$ et donc f_3 admet un prolongement par continuité en $(0,0)$ en posant $f_3(0,0) = 0$.
   (b) 2nd cas : $x_0 \neq 0$ et $(x_0, y_0) = (x_0, x_0)$.
   Dans ce cas on a $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)}(x-5y) = x_0 - 5x_0 = -4x_0 \neq 0$ et $\frac{x}{x^2-y^2}$ n'a pas de limite, on en déduit que $f_3(x,y) = (x-5y)\sin\frac{x}{x^2-y^2}$ n'a pas de limite en (x_0, x_0).
   (c) 3e cas : $x_0 \neq 0$ et $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0)$.
   Dans ce cas on a $\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)}(x-5y) = x_0 + 5x_0 = 6x_0 \neq 0$ et $\frac{x}{x^2-y^2}$ n'a pas de limite, on en déduit que $f_3(x,y) = (x-5y)\sin(\frac{x}{x^2-y^2})$ n'a pas de limite en $(x_0, -x_0)$.

   En conclusion, f_3 admet un prolongement par continuité sur $D_{f_3} \cup \{(0,0)\}$, mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13

On considère les fonctions définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x,\ y) = \sup(\frac{x}{2+|y|},\ \frac{y}{1+|x|});\ g(x,\ y) = \inf(\frac{x^4y}{|x|+4y^2},\ \frac{xy^4}{|y|+4x^2})$$

Sont elles continues ?

Solution: On peut exprimer les fonctions sup et inf de deux fonction F et G par les formules

$$\sup(F, G)(x, y) = \frac{F(x, y) + G(x, y)}{2} + \frac{|F(x, y) - G(x)|}{2},$$

$$\inf(F, G)(x, y) = \frac{F(x, y) + G(x, y)}{2} - \frac{|F(x, y) - G(x, y)|}{2}.$$

On en déduit que si F et G sont continues alors les fonctions $\sup(F, G)$ et $\inf(F, G)$ sont continues.

1. les fonctions $\frac{x}{2+|y|}$ et $\frac{y}{1+|x|}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ comme quotients de fonctions continues, d'où $f(x,\ y) = \sup(\frac{x}{2+|y|},\ \frac{y}{1+|x|})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. les fonctions $\frac{x^4 y}{|x|+4y^2}$ et $\frac{xy^4}{|y|+4x^2}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ comme quotients de fonctions continues, d'où $g(x,\ y) = \inf(\frac{x^4 y}{|x|+4y^2},\ \frac{xy^4}{|y|+4x^2})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.