Feuille d'exercices numéro 1 : Suites et séries

Correction de quelques exercices non traités en TD

Exercice 1

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = \frac{2n-7}{3n+2})$$

est majorée par $2/3$ et minoré par $-7/2$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit comme suit :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(u_n = \frac{1}{\sqrt{n}})$$

1) Trouver un entier n_0 à partir duquel la valeur absolue du terme général est inférieur à 10^{-2}.
2) Montrer en utilisant la définition de la convergence d'une suite que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 3

Trouver la limite des suites numériques dont le terme général est défini comme suit :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^2+1},\ u_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2-1}.$$

Démontrer la réponse en n'utilisant que la définition de la convergence.
Solution:

On rappelle que montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ revient à montrer que pour tout choix d'un nombre réel strictement positif ϵ, on doit trouver un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \epsilon$.

En écriture mathématique : $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon$

i) En multipliant par l'expression conjugué on a $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.
On veut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n \leq \epsilon$.
Comme $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, il suffit d'avoir pour cela

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \epsilon \iff \sqrt{n} \geq \frac{1}{\epsilon} \iff n \geq \frac{1}{\epsilon^2}$$

On peut donc prendre $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon^2} \rfloor + 1$.

ii) On a $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^2+1}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2}{n^2} = 3$.
On veut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - 3| \leq \epsilon$.
Comme $|u_n - 3| = \left|\dfrac{3n^2-2n+1}{n^2+1} - 3\right| = \left|\dfrac{3n^2-2n+1-3(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\dfrac{-2(n+1)}{n^2+1}\right| = 2\dfrac{2n+1}{n^2+1} \leq 2\dfrac{2}{n} = \dfrac{4}{n}$, il suffit d'avoir pour cela

$$\frac{4}{n} \leq \epsilon \iff n \geq \frac{4}{\epsilon}$$

On peut donc prendre $N = \lfloor \frac{4}{\epsilon} \rfloor + 1$.

iii) On a $u_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2-1}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = 1$.
On veut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - 1| \leq \epsilon$.

Comme $|u_n - 1| = \left|\frac{n^2+(-1)^n}{n^2-1} - 1\right| = \left|\frac{n^2+(-1)^n-(n^2-1)}{n^2-1}\right| = \left|\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right| \leq \frac{2}{n^2-1}$, il suffit d'avoir pour cela

$$\frac{2}{n^2-1} \leq \epsilon \iff n^2 - 1 \geq \frac{2}{\epsilon} \iff n^2 \geq \frac{2}{\epsilon} + 1 \iff n \geq \sqrt{\frac{2}{\epsilon} + 1}$$

On peut donc prendre $N = \lfloor \sqrt{\frac{2}{\epsilon} + 1} \rfloor + 1$.

Rappel : $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière du nombre réel x c'est à dire c'est l'unique nombre entier tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

On note parfois $\lfloor x \rfloor$ par $E(x)$.

Exercice 4

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1},\ u_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2},\ u_n = \frac{\cos n}{n},\ u_n = \frac{n^2-n+1}{n^3+2n^2+7}.$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2+4+6+\cdots+2(n+1)}.$$

Ces suites sont elles définies sur tout $\mathbb{N}$?

Exercice 5

On veut étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $\cos n$.

1) Exprimer $\cos(n+1)$ et vérifier la relation :

$$\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin n \sin 1.$$

2) Déduire de la question précédente que la suite $v_n = \sin n$ est convergente de limite 0.
3) Si la suite $u_n = \cos n$ est convergente de limite l alors cette limite est nulle.
4) Montrer que l'on arrive alors à une contradiction.

Solution: On veux montrer que la suite $(\cos n)$ est divergente, on va pour cela supposer qu'elle converge ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$) et aboutir à une contradiction.

1) Les formules de trigonométrie nous donnent

$$\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1 \text{ et } \cos(n-1) = \cos n \cos 1 + \sin n \sin 1.$$

La différence des formules précédents nous donne

$$\cos(n+1) - \cos(n-1) = (\cos n \cos 1 - \sin n \sin 1) - (\cos n \cos 1 + \sin n \sin 1) = -2\sin n \sin 1.$$

2) La convergence de $\cos n$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n-1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = l$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+1) - \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n-1) = l - l = 0$. D'où $-2\sin 1 \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2\sin n \sin 1 = 0$, par conséquent, puisque $\sin 1 \neq 0$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = 0$.

3) Par passage à la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, dans $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(n+1) = \lim_{n\to+\infty} \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1 \implies l = l\cos 1 \implies (1-\cos 1)l = 0.$$

puisque $\cos 1 \neq 0$ il s'ensuit que $l = 0$.

4) D'après les résultats obtenus en 2) et 3) et par passage à la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, dans la célebre formule de trigonométrie $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$, on obtient

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \cos^2 n + \sin^2 n = \lim_{n\to+\infty} \cos^2 n + \lim_{n\to+\infty} \sin^2 n = 0 + 0 = 0 \implies 0 = 1$$

ce qui est absurde, ainsi l'hypothèse, la suite $(\cos n)$ converge, est fausse, c'est à dire qu'on a montrer que cette suite diverge.

Exercice 6

Décider dans chacun des énoncés s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse ;

1) Soient deux suites convergents $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n < v_n)$, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n < \lim_{n\to\infty} v_n.$$

2) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 alors $u_n < 1$ pour n assez grand.

3) Une suite à termes strictement négatifs ne peut converger vers 0.

4) Soient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque, alors la suite de terme général $u_n v_n$ converge vers 0.

5) Une suite est convergente si et seulement si toute sous suite est convergente.

6) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{2n} - u_n$ est convergente de limite nulle.

7) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

8) Une suite croissante majorée par un réel α converge vers ce dernier.

9) Une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 7

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

est croissante majorée. À l'aide d'un encadrement par une intégrale, déterminer sa limite.

Solution:

a) $u_{n+1} - u_n = (\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)}) - (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}) = \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} - \frac{1}{n+1}$
$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} > 0$ d'où (u_n) est croissante.

b) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$, ainsi (u_n) est décroissante.

la suite (u_n) est croissante et majorée, et d'après un théorème du cours elle converge.
On va maintenant déterminer sa limite.

Si $k \leq x \leq k+1$, alors $k+n \leq x+n \leq k+1+n$ en prenant les inverse on aura $\dfrac{1}{k+1+n} \leq \dfrac{1}{x+n} \leq \dfrac{1}{k+n}$, et en intégrant entre k et $k+1$ on obtient $\dfrac{1}{k+1+n} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1+n}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x+n}dx$ par suite

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x+n}dx = \int_0^{n-1} \frac{1}{x+n}dx = [\ln(x+n)]_0^{n-1} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2)$$

Maintenant, on intégre entre k et $k+1$ l'inégalité $\dfrac{1}{k+1+n} \leq \dfrac{1}{x+n}$ on obtient
$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x+n}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+n}dx = \frac{1}{k+n}$ par suite $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x+n}dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x+n}dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = u_n$, comme

$$\int_1^n \frac{1}{x+n}dx = [\ln(x+n)]_1^n = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

on aura $u_n \geq \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$.

Ainsi, $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln(2)$ et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \ln(2)$ doù $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$

Exercice 8

Soient les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que ceux sont des suites adjacentes.

Exercice 9

Même question que l'exercice précédent avec les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Solution: On va vérifier les 4 conditions que doivent satisfaire deux suites pour être adajcentes :

i) $u_{n+1} - u_n = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}) - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \implies (u_n)$ est croissante.

ii) $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + (\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0 \implies (v_n)$ est décroissante.

iii) $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \geq 0 \implies v_n \geq u_n$.

iv) $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \implies \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n!} = 0$.

Ainsi, les suites u_n et v_n sont adjacentes, par suite elles sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 10

Montrer en utilisant le définition d'une suite tendant vers $+\infty$ que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Solution: On rappelle que montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ revient à montrer que pour tout choix d'un nombre réel strictement positif A, on doit trouver un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \geq A$.

$$\text{Formellement :} \qquad \forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A$$

Alors, pour avoir $u_n = \sqrt{n} \geq A$, il suffit que $n \geq A^2$; on peut donc choisir $N = \lfloor A^2 \rfloor$.

Exercice 11

Montrer à l'aide d'une minoration par une intégrale que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$.

Exercice 12

Construire deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que le produit $(v_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite convergente mais dont l'une ne converge pas.

Exercice 13

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n} \qquad u_n = \frac{n^n}{n!} \qquad u_n = \frac{10^n}{n^n} \qquad u_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 14

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{1}{4},\ u_2 = \frac{1\cdot 3}{4^2 2!},\ u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4^n\cdot n!}.$$

Montrer que $u_{n+1} < u_n/2$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution: On a

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{4^{n+1}\cdot(n+1)!} = u_n\cdot\frac{(2n+1)}{4\cdot(n+1)}$$

comme $\frac{(2n+1)}{4\cdot(n+1)} < \frac{(2(n+1)}{4\cdot(n+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, il s'ensuit que $u_{n+1} < \dfrac{u_n}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

On obtient alors l'inégalité suivante $0 \leq u_n < \dfrac{u_{n-1}}{2} < \dfrac{u_{n-2}}{2^2} < \ldots < \dfrac{u_1}{2^{n-1}}$;

comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_1}{2^{n-1}} = u_1 \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$, il s'ensuit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 15

Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse.

1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   Vrai : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \implies \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l - l = 0$

2) Si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

3) Si la suite $((u_n)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
   Faux : la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente bien que $(u_n)^2 = ((-1)^n)^2 = (-1)^{2n} = 1$ est constante et donc convergente.

4) Une suite qui diverge ne peut pas être bornée.
   Faux : la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente bien qu'elle soit bornée.

5) Une suite monotone qui diverge ne peut pas être bornée.
Vrai : d'après le cours, une suite monotone et bornée est convergente, par conséquent si la suite est monotone et divergente elle ne peut pas être bornée

6) Une suite strictement négative qui n'est pas bornée tend vers $-\infty$.
Faux : la suite $u_n = \begin{cases} -n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ne tends pas vers $-\infty$ bien qu'elle soit non bornée et négaive

7) Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
Faux : la suite $u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ne tends pas vers ∞ bien qu'elle ne soit pas majorée.

8) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante pour laquelle il existe une sous suite qui tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$. Faux : la suite $u_n = \begin{cases} -n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ne tends pas vers $-\infty$ bien que sa sous-suite $u_{2n} = -2n$ tends vers $-\infty$.

9) Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'une converge et l'autre diverge, que peut on dire de la suite produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
On ne peut rien dire en général : en effet on a les deux cas, par exemple :
a) si $u_n = 0$ (est convergente) et $v_n = n$ (est divergente) alors $u_n v_n = 0$ est convergente.
b) si $u_n = 1$ (est convergente) et $v_n = n$ (est divergente) alors $u_n v_n = n$ est divergente.

Exercice 16

Montrer dans les deux cas suivants que la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général diverge :

$$u_n = (-1)^n, \; u_n = \cos\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 17

On considère les séries $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général suivant :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} (n \geq 1) \; ; \; u_n = \frac{1}{n^2-1} (n \geq 2) \; .$$

Montrer qu'elles sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 18

Même question que l'exercice précédent avec :

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}, \; u_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n} \; .$$

Exercice 19

Décider pour chacun des énoncés s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse.

1) La série de terme général 1 est convergente de limite 1.
Faux : la série de terme général $u_n = 1$, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$

2) Si $\lim u_n = 0$ alors la série (u_n) est convergente.
Faux : la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, est divergente bien que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{n} = 0$

3) Si la série (u_n) diverge alors la suite (u_n) ne tend pas vers 0.
Faux : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{n} = 0$ bien que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente, puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$

4) Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série (u_n) diverge.
Vrai : C'est la proposition contraposée de " la série de terme général (u_n) converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$"

Exercice 20

Étudier la nature des séries dont le terme général est donné par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}, \quad u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad u_n = \ln\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n}.$$

Exercice 21

Soit une suite (u_n) à termes positifs.

1) Montrer que si la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors la série $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
La série de terme général (u_n) converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, ainsi, pour n assez grand, $0 \leq u_n \leq 1$ mais alors $0 \leq (u_n)^2 \leq u_n$, et d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, comme la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente il en est de même pour la série $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer que si la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors la série $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. si la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors il existe $S \geq 0$ tel que $\sum_{n=0t}^{+\infty} u_n = S$ d'autre part comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on aura $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$, donc la série à termes positifs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée parsuite elle est convergente (voir le cours).

Exercice 22

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs. Soit α un réel.

1) On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Montrer que la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha < 1$.

Si $\alpha > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 1$, alors, pour n assez grand, $n^\alpha u_n \leq \frac{3}{2} \implies u_n \leq \frac{3}{2n^\alpha}$, ainsi
u_n est donc majoré par le terme général d'une série de Riemann convergente, par suite la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Si $\alpha < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 1$, alors, pour n assez grand $n^\alpha u_n \geq \frac{1}{2} \implies u_n \geq \frac{1}{2n^\alpha}$,
ainsi u_n est donc minoré par le terme général d'une série de Riemann divergente, par suite la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2) On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $\alpha > 1$.
Si $\alpha > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors, pour n assez grand, $n^\alpha u_n \leq 1 \implies u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$, ainsi
u_n est donc majoré par le terme général d'une série de Riemann convergente, par suite la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si $\alpha \leq 1$.

Si $\alpha < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors, pour n assez grand $n^\alpha u_n \geq 1 \implies u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$,
ainsi u_n est donc minoré par le terme général d'une série de Riemann divergente, par suite la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 23

Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné par :

$$u_n = \frac{n+\cos n}{n^3+1},\ u_n = \ln(1+\frac{1}{n^2})\ ,\ u_n = \sqrt{\frac{\ln n}{n}},\ u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}.$$