SÉANCE 5 : INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES : APPLICATIONS DU THÉORÈME DE MINKOWSKI

- Rappel :

THÉORÈME

On munit le plan réel $\mathbb{R}^2$ du réseau carré habituel $\mathbb{Z}^2$.
Soit C un M-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de centre de symétrie l'origine $(0,0)$.
Si l'aire de C, $\mathscr{A}(C) > 4$ alors :
C contient au moins un noeud du réseau différent de l'origine $(0,0)$.

- On va dans ce qui suit donner des applications de ce théorème, à la recherche de solutions entières d'équations de degrés 2 à coefficients entiers, comme l'expression d'un entier naturel en somme de quatre carrés d'entiers.

Un exercice d'application :

Exercice

Soient a, b et c des entiers naturels strictement positifs tels que $ac = b^2 + b + 1$. Montrer que l'équation

$$ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1$$

à des solutions entières c-à-d des solutions (x, y) tel que x et y soient des entiers.

Exemple

- Un exemple d'une telle équation est celle de l'ellipse $7x^2 - 9xy + 3y^2 = 1$.
- On vérifie que $ac = 7.3 = 4^2 + 4 + 1 = b^2 + b + 1$.
- Les points $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,3)$
  et leurs symétriques $(-1,-1)$, $(-1,-2)$ et $(-2,-3)$ sont des points sur l'ellipse.

SOLUTION :

- On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points :
  $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 < 2\}$
- On va commencer par montrer que E est un M-ensemble
- puis que son aire $\mathscr{A}(E) > 4$.
- appliquer le théorème de Minkowski, pour garantir l'existence d'un point (x,y) du réseau , autre que l'origine, dans E
- et enfin, montrer que nécessairement ce point est solution de l'équation $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

SOLUTION :

- L'ensemble E est symétrique par rapport à l'origine en effet :
- un point $(x, y) \in E$ si et seulement si $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 < 2$
- mais $a(-x)^2 - (2b+1)(-x)(-y) + c(-y)^2 = ax^2 - (2b+1)xy + cy^2$
- d'où $(-x, -y) \in E$.

SOLUTION :

- L'ensemble E est convexe
- Soient (x, y) et (x', y') des points de E on doit montrer que le segment qui les joint est contenu dans E
- cela revient à montrer que pour tout $0 \leq t \leq 1$ on a
- $(1-t)(x,y) + t(x',y') = ((1-t)x + tx', (1-t)y + ty') \in E$
- on va pour cela utiliser l'équation réduite d'une ellipse.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

- On rappelle que l'équation réduite d'une ellipse est de la forme

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$$

où A et B sont des constantes >0.

- et que l'aire de la surface délimitée E par cette ellipse, est donnée par la formule

$$\mathscr{A}(E)=\pi AB.$$

- On va montrer que $ax^2-(2b+1)xy+cy^2=2$ est l'équation d'une ellipse.
- On a

$$
\begin{aligned}
ax^2-(2b+1)xy+cy^2 &= a\left(x-\frac{2b+1}{2a}y\right)^2+\frac{4ac-(2b+1)^2}{4a}y^2 \\
&= a\left(x-\frac{2b+1}{2a}y\right)^2+\frac{3}{4a}y^2
\end{aligned}
$$

- On pose $\begin{cases} X = x-\frac{2b+1}{2a}y \\ Y = y \end{cases}$
- Alors $ax^2-(2b+1)xy+cy^2=2$ devient $\dfrac{X^2}{A^2}+\dfrac{Y^2}{B^2}=1$
- avec $A=\sqrt{\frac{2}{a}}$ et $B=\sqrt{\frac{8a}{3}}$.
- Ainsi, l'aire de E, $\mathscr{A}(E)=\pi AB=\pi\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sqrt{\dfrac{8a}{3}}=\pi\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$

- Comme $\mathscr{A}(E) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} > 4$, le théorème de Minkowski garantit l'existence dans E d'un point (x_0, y_0) à coordonnées entières et différent de l'origine.
- On remarquera que $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = a\left(x - \frac{2b+1}{2a}y\right)^2 + \frac{3}{4a}y^2 > 0$, en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Puisque $ax_0^2 - (2b+1)x_0y_0 + cy_0^2$ est un entier, strictement compris entre 0 et 2, il est nécessairement égal à 1, i.e. $ax_0^2 - (2b+1)x_0y_0 + cy_0^2 = 1$.
- ce qui termine la preuve.

Le théorème fondamental de Minkowski dans un réseau quelconque

- Pour la prochaine application, on a besoin de la version du théorème de Minkowski qui s'applique à des réseau x quelconques.
- Un **réseau** de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$\{mv_1 + nv_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

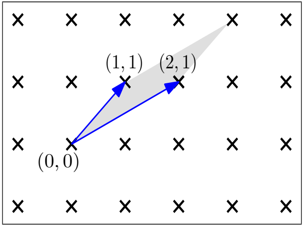
- où $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Un point du réseau est appelé un **noeud**.

EXEMPLE

- Si $v_1 = (1,0)$ et $v_2 = (0,1)$, alors le réseau obtenu n'est autre que le réseau "carré" $\mathbb{Z}^2$.
- On obtient pour $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (2,1)$

$$\Gamma = \{(m+2n, m+n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Réseau



- Si $v_1 = (a, b)$ et $v_2 = (c, d)$ on note par

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- alors Γ est égal à $\left\{ M \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\} = M\mathbb{Z}^2$
- Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est égal à $det(M) = ad - bc$.

Réseau

DÉFINITION

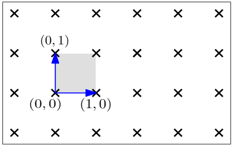
- On appelle parallélogramme fondamental l'ensemble

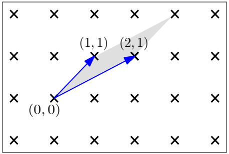
$$\mathscr{P} = \left\{ (ax + cy, bx + dy) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

- L'aire du parallélogramme fondamental sera noté $\mathscr{V}$.
- L'aire du parallélogramme fondamental $\mathscr{P}$ est égal à

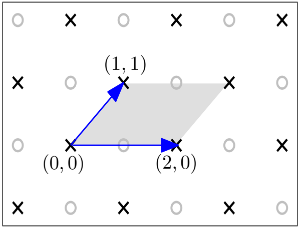
$$|det(M)| = |ad - bc|.$$

Réseau





Le volume du parallélogramme fondamental est égal à 1 pour les deux réseaux



Le volume du parallélogramme fondamental est égal à 2 pour ce réseau

Le théorème fondamental de Minkowski dans un réseau quelconque

Théorème

On munit le plan réel $\mathbb{R}^2$ d'un réseau Γ. Soit $\mathscr{A}(\mathscr{P})$ l'aire du parallélogramme fondamental de Γ.
Soit C un M-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de centre de symétrie l'origine $(0,0)$.
Si l'aire C, $\mathscr{A}(C) > 4\mathscr{A}(\mathscr{P})$ alors C contient au moins un noeud du réseau Γ différent de l'origine $(0,0)$.

- Soit p un nombre premier de la forme $p = 4k + 1$.

LEMME

Alors, il existe u et $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$u^2 + 1 = np.$$

- On pose
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & p \end{pmatrix}.$$
- On a $\det(M) = p$, d'où $\Gamma := M\mathbb{Z}^2$ définit un réseau de $\mathbb{R}^2$ dont le parallélogramme fondamental est d'aire :
$$\mathscr{A}(\mathscr{P}) = |\det(M)| = p.$$

- Si $(t_1,\ t_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$,
- Alors
$$x_1^2 + x_2^2 = t_1^2 + (ut_1 + pt_2)^2 \equiv (1+u^2)t_1^2 \equiv 0 \pmod p.$$
c-à-d que $x_1^2 + x_2^2$ est divisible par p pour tout point (x_1, x_2) du réseau.
- Soit le disque de rayon $\sqrt{2p}$ centré en $(0,0)$
$$D = B_0(\sqrt{2p}) = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2p\}$$
- On a
$$\mathscr{A}(D) = \pi(\sqrt{2p})^2 = 2\pi p > 4p = 2^2 \mathscr{A}(\mathscr{P}),$$
- d'après le théorème de Minkowski il existe $(x_1,\ x_2) \in \Gamma$ tels que
-
$$0 < x_1^2 + x_2^2 < 2p.$$
- d'autre part p divise $x_1^2 + x_2^2$,
- par conséquent l'unique possibilité est : $x_1^2 + x_2^2 = p$.

CQFD.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

- On a donc montré :

THÉORÈME

Un nombre premier p est somme de deux carrés si et seulement si il est de la forme

$$p = 4k+1,\ \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

- Maintenant, l'identité $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, montre que le produit de sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés
- et le fait que tout entier se décompose en produit de nombres premiers
- permet de réduire l'étude aux nombre premiers
- On remarquera que pour x et y entiers le reste de la division de x^2+y^2 par 4 est soit 0, soit 1 soit 2, par conséquent les nombres entiers de la forme $4k+3$ ne peuvent s'écrire comme somme de deux carrés.

APPLICATION : SOMME DE DEUX CARRÉS

THÉORÈME DE FERMAT

Un nombre entier naturel n est somme de deux carrés si et seulement si dans sa décomposition en facteurs irréductibles, les facteurs de la forme $4p+3$ sont en puissance paire.

EXEMPLE

- Par exemple $7 = 4 + 3$ n'est pas somme de deux carrés.
- Mais $n = 25480 = 2^3.5.7^2.13$ est une somme de deux carrés, (7 est présent dans la décomposition de 25480 avec une puissance paire.)
- Une décomposition de $25480 = 42^2 + 154^2$.

LES QUATERNIONS : $\mathbb{H}$

- On définit $\mathbb{H}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 avec comme base $\{\mathbf{1},\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$. Ses éléments s'appellent des **quaternions**,
- et ils s'écrivent sous la forme

$$a + bi + cj + dk$$

avec $a,\ b,\ c,\ d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- On a deux opérations : l'addition et la multiplication par un scalaire réel

$$(a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj\ + hk) = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k,$$

$$\lambda(a + bi + cj + dk) = \lambda a\ + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk.$$

Généralisation du théorème fondamental de Minkowski

- La multiplication est définie pour les membres de la base par les formules :

$$1^2 = 1,\ 1i = i1 = i,\ 1j = j1 = j,\ 1k = k1 = k,$$
$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = -1,$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

On peut se souvenir des signes dans les deux dernières lignes de formules en notant la suivante : S*i* $u,\ v,\ w$ *sont trois* membres consécutifs de la suite périodique $i,\ j,\ k,\ i,\ j,\ k,\ i,\ j,\ k,\ \ldots$, alors on a $uv = w$ *et* $vu = -w$.

Généralisation du théorème fondamental de Minkowski

- Ce produit s'étend à deux quaternions généraux :

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$
$$= (\alpha_0 b_0 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2 - \alpha_3 b_3) + (\alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0 + \alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2) i$$
$$+ (\alpha_0 b_2 + \alpha_2 b_0 + \alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3) j + (\alpha_0 b_3 + \alpha_3 b_0 + \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1) k.$$

- En pratique, on développe le produit en termes de produits d'éléments de la base $\{1, i, j, k\}$, puis on applique les formules aux termes.
- Par exemple

$$(4+i)(2-3j) = 4\cdot 2 - 4\cdot 3j + i\cdot 2 - i\cdot 3j = 8 - 12j + 2i - 3k = 8 + 2i - 12j - 3k.$$

Généralisation du théorème fondamental de Minkowski

- Définition : Un quaternion est *réel* s'il est de la forme

$$a = a + 0i + 0j + 0k$$

  avec $a \in \mathbb{R}$.

- Il est *imaginaire pur* s'il est de la forme

$$bi + cj + dk$$

  avec $b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

- Tout quaternion a une *partie réelle* et une *partie imaginaire*

$$\Re\mathrm{e}(a + bi + cj + dk) = a,$$

$$\Im\mathrm{m}(a + bi + cj + dk) = bi + cj + dk$$

- La partie réelle d'un quaternion est un nombre réel, mais la partie imaginaire a trois composantes.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE MINKOWSKI

- La multiplication n'est pas commutative : $uv \neq vu$
- Définition : Le *conjugue* d'un quaternion est

$$\overline{a+bi+cj+dk} = a-bi-cj-dk.$$

  Donc la conjugaison quaternionique ne change pas la partie réelle, et elle change tous les signes dans la partie imaginaire.
- Soit $\mathrm{u},\ \mathrm{v} \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}, \quad \overline{\lambda u} = \lambda \overline{u}, \quad \overline{\overline{u}} = u,$$

$$\overline{uv} = \overline{v}\ \overline{u}.$$

  Ainsi le conjugué d'un produit est le produit des conjugués *dans l'ordre inverse*.
- Par exemple

$$\overline{(4+i)(2-3j)} = 8-2i+12j-3k = \overline{(2-3j)}\ \overline{(4+i)} = (2+3j)(4-i).$$

- Soit u, v des quaternions et λ un réel. Alors on a $\|uv\| = \|\mathrm{u}\|.\|\mathrm{v}\|$.
- Preuve : On a

$$\|\mathrm{uv}\|^2 = \mathrm{uv}\overline{\mathrm{uv}} = \mathrm{uv}\overline{\mathrm{v}}\ \overline{\mathrm{u}} = \mathrm{u}\|\mathrm{v}\|^2\overline{\mathrm{u}}.$$

Comme $\|\mathrm{v}\|^2$ est un réel, il commute avec tous les quaternions. D'où

$$\|\mathrm{uv}\|^2 = \mathrm{u}\overline{\mathrm{u}}\|\mathrm{v}\|^2 = \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2 = (\|\mathrm{u}\|\,\|\mathrm{v}\|)^2$$

Généralisation du théorème fondamental de Minkowski

Lemme (Identité d'Euler)

Pour tous $a_1, a_2, a_3\ a_4,\ b_1,\ b_2, b_3$ et b_4, des nombres réels on a,

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = (a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2+$$

$$(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2$$

$$+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.$$

- Preuve : Si $\mathrm{u} = a_1+a_2i+a_3j+a_4k$ et $\mathrm{v} = b_1+b_2i+b_3j+b_4k$ l'identité d'Euler est exactement la relation

$$\|\mathrm{uv}\|^2 = \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2$$

Généralisation du théorème fondamental de Minkowski

Théorème

Soit n un entier naturel non nul.
On munit le plan réel $\mathbb{R}^n$ d'un réseau Γ dont le volume du domaine fondamental est égal à $\mathscr{V}$.
Soit C un M-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de centre de symétrie l'origine $(0,0)$.
Si le volume de $\mathscr{A}(C)$ est $> 2^n\mathscr{V}$ alors C contient au moins un noeud du réseau Γ différent de l'origine.

Observation

- Pour $n = 3$, on peut observer qu'un cube centré à l'origine et de volume plus grande ou égale à 8 contient au moins 25 points du réseau, tous les points du réseau voisins de l'origine.
- Cependant, si on considère un tel cube symétrique par rapport à l'origine, de volume légèrement plus petite que 8, alors il ne contiendra aucun point du réseau,

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE MINKOWSKI : THÉORÈME DE LAGRANGE.

LEMME 1 (IDENTITÉ D'EULER)

pour tous Pour tous a_1, a_2, a_3 a_4, b_1, b_2, b_3 et b_4, on a

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = (a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2+$$

$$(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2$$

$$+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.$$

- Ainsi l'ensemble des entiers qui sont somme de quatre carrés est stable par multiplication.
- Comme $1 = 1^2+0^2+0^2+0^2$ est la somme de quatre carrés, il suffit de montrer que tout nombre premier p est une somme de quatre carrés.
- Comme $2 = 1^2+1^2+0^2+0^2$, on peut donc supposer que $p > 2$.

LEMME 2

Le volume de la boule de rayon R de $\mathbb{R}^4$ est égal à $\dfrac{\pi^2}{2} R^4$.

Preuve : voir commentaires plus bas.

LEMME 3

Soit p un nombre premier > 2. Il existe $r,\ s \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$r^2 + s^2 + 1 = kp.$$

- *Preuve :* Tout $x, y' \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, on a $x^2 \equiv y^2 \pmod p$ si et seulement si $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod p$ ce qui entraînerait $x = \pm y$.
  Par conséquent Il y a $\dfrac{p-1}{2} + 1 = \dfrac{p+1}{2}$ carrés r^2 non équivalents modulo p. de p donc $\dfrac{p-1}{2} + 1 = \dfrac{p+1}{2}$ carrés distincts de p.
- Le même argument montre qu'il existe $\frac{p+1}{2}$ elément de la forme $-1 - s^2$ non équivalents modulo p.
- Comme $\dfrac{p+1}{2} + \dfrac{p+1}{2} > p$, ces ensembles ne sont pas disjoints,
- par conséquent, il existe $r,\ s \in \mathbb{Z}$ tels que $r^2 + s^2 + 1$ soit un multiple de p, cqfd.

Théorème de Lagrange.

- On va maintenant prouver :

Théorème de Lagrange

Tout entier naturel est une somme de quatre carrés.

Exemples

- $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$
- $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$
- $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$
- $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
- $5 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$
- $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2$
- $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ etc...

Théorème de Lagrange.

- D'après le Lemme 3, il existe $r,\ s \in \mathbb{Z}$ tel que $r^2 + s^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$.
- On pose

$$M = \begin{pmatrix} p & 0 & r & s \\ 0 & p & s & -r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On a $\det(M) = p^2$, alors $\Gamma := M\mathbb{Z}^4$ définit un réseau dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$\mathrm{Vol}(\Gamma) = \det(M) = p^2.$$

- Si $(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4) \in \mathbb{Z}^4$ et $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) := M(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)$ alors

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (pt_1 + rt_3 + st_4)^2 + (pt_2 + st_3 - rt_4)^2 + t_3^2 + t_4^2$$

$$\equiv t_3^2(r^2 + s^2 + 1) + t_4^2(r^2 + s^2 + 1) \equiv 0 \pmod p.$$

c-à-d que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ est un multiple de p, si $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ est un point du réseau.

Théorème de Lagrange.

- Soit

$$B_0(\sqrt{2p}) = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2p\}$$

la boule ouverte de rayon $\sqrt{2p}$ centrée en l'origine de $\mathbb{R}^4$.
D'après le Lemme 2, on a

$$\mathrm{Vol}(B_0(\sqrt{2p})) = \frac{\pi^2}{2}(\sqrt{2p})^4 = 2\pi^2 p^2 > 16p^2 = 2^4 \mathrm{Vol}\Lambda,$$

par conséquent, d'après le théorème de Minkowski, il existe $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Gamma$ telle que

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2p.$$

Comme p divise $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, la seule conclusion possible est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = p.$$

CQFD.

Soit $B_n(R)$ la boule de rayon R centrée en l'origine de $\mathbb{R}^n$, c-à-d

$$B_n(R) = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\right\}$$

- Par exemple, pour $n = 1$, $B_1(R)$ est le segment $[-R, R]$, pour $n = 2$, le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R etc...
- On a $B_n(R) = RB_n(1)$, ainsi on obtient la boule de rayon R, en appliquant une homothétie de rapport R à la boule de rayon 1.
- On note par V_n le volume de la boule $B_n(1)$.
- Ainsi, le volume $Vol(B_n(R)) = Vol(RB_n(1)) = R^n Vol(B_n(1)) = R^n V_n$.
- On va décrire dans ce qui suit, une relation de récurrence entre V_n et V_{n-1} c-à-d entre le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et celui de la boule unité dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a la relation de récurrence

$$V_n = 2\, V_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \; d\theta$$

- En posant $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \; d\theta$, une intégration par parties nous donne

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

- En effet, effectuons une intégration par parties en posant

$$u = \cos^{n-1}\theta,\ u' = -(n-1)\sin\theta\cos^{n-2}\theta,$$

$$v' = \cos\theta,\ v = \sin\theta.$$

On obtient :

$$I_n = \left[\sin\theta\cos^{n-1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\ d\theta$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta(1-\cos^2\theta)\ d\theta = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Ainsi, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, par conséquent $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

On va faire quelques calcul de volume à l'aide de cette relation.

On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

La relation de récurrence $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ nous donne :

$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$ et $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}$.

Sachant que $V_0 = 1$, $V_1 = 2$ on aura : $V_2 = 2V_1 I_2 = 4\frac{\pi}{4} = \pi$,

$V_3 = 2V_2 I_3 = 2\pi\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$ et $V_4 = 2V_3 I_4 = 2\frac{4\pi}{3}\frac{3\pi}{16} = \frac{8\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{2}$

- On en déduit que le volume de la boule de rayon R centrée en l'origine de $\mathbb{R}^4$ est égal à

$$Vol(B_4(R)) = \frac{\pi^2}{2} R^4.$$

Comportement du volume de la boule en grande dimension

Pour tout $R > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} V_n(B(R)) = 0$$

où $V_n(B(R))$ est le volume d'une boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$.

- Ci-dessous un graphe illustration les variations du volume de la boule unité en fonction de la dimension :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_n	2	3,14	4,19	4,93	5,26	5,17	4,72	4,06	3,30	2,55