## Théorème de Pick

Tout polygone simple $P$ inscrit dans un réseau admet une triangulation primitive, de plus

- L'aire de tout triangle primitif est égale à $\frac{1}{2}$.
- Le nombre de triangles primitifs dans la triangulation de $P$ est égal à

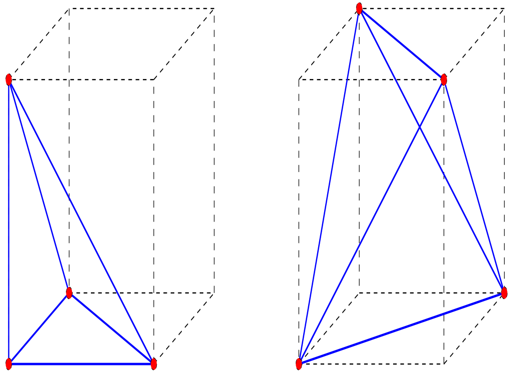
  $$2I_p + B_p - 2$$

  où $I_p$ et $B_p$ sont respectivement les nombres des noeuds du réseau intérieurs et sur le bord de $P$.
- En particulier l'aire de $P$ se calcul par la formule de Pick

  $$\mathscr{A}(P) = I_p + \frac{B_p}{2} - 1.$$

# Remarque

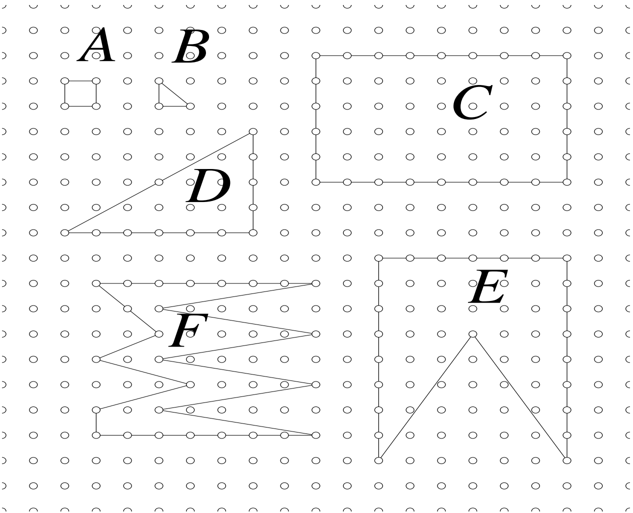
- La formule de Pick ne se généralise pas tel quel en dimension supérieure ($\geq 3$)
- En effet, les tétraèdre $T_1$ et $T_2$ dans $\mathbb{R}^3$ de sommets respectivement
- $T_1 : (0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$ et $(0,0,1)$
- $T_2 : (0,0,0),(1,1,0),(1,0,1)$ et $(0,1,1)$



## REMARQUE

- vérifient : $I_{T_1} = I_{T_2} = 0$ et $B_{T_1} = B_{T_2} = 4$, mais n'ont pas le même volume
- on a, $Vol(T_1) = \dfrac{1}{3} \times$ base $\times$ hauteur $= \dfrac{1}{6}$ et $Vol(T_2) = \dfrac{1}{3}$.
- **Exercice :** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le tétraèdre $T_k$ dans $\mathbb{R}^3$ de sommets $(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)$ et $(0,0,k)$ vérifie :
- $I_{T_k} = 0$ et $B_{T_k} = 4$ et $Vol(T_k) = \dfrac{k}{6}$.

1) Calculer l'aire des polygones suivants :



**Réponse :**

- $\mathscr{A}(A) = 0 + \frac{4}{2} - 1 = 1$
- $\mathscr{A}(B) = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
- $\mathscr{A}(C) = 28 + \frac{26}{2} - 1 = 40$
- $\mathscr{A}(D) = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12$
- $\mathscr{A}(E) = 22 + \frac{24}{2} - 1 = 33$
- $\mathscr{A}(F) = 9 + \frac{24}{2} - 1 = 20$

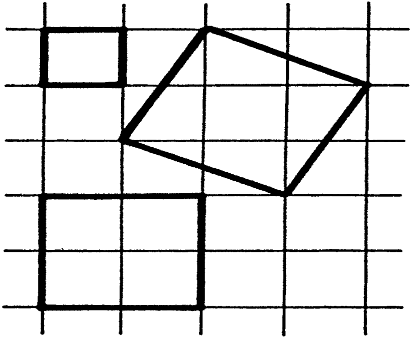
2) Montrer qu'il est possible d'inscrire un carré dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire dont les sommets ont des coordonnées entières.

3) Est-il possible d'inscrire un triangle équilatéral dans le réseau $\mathbb{Z}^2$ ?

4) Qu'en est-il de l'hexagone ?

- Réponse :

1) Par exemple le carré de coordonées $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

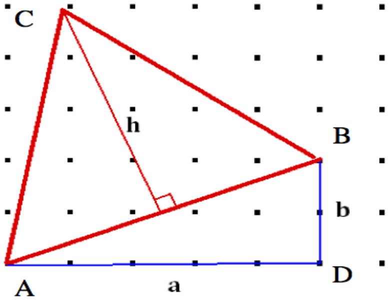


2) **Réponse : On ne peut inscrire un triangle équilatéral dans le réseau $\mathbb{Z}^2$.**

   En effet, un triangle équilatéral de sommets entiers, a le carré de la longueur de ses côtés entiers positifs.

   Par suite, son aire est irrationnelle ce qui contredit le théorème de Pick.

- Plus de détails :
- supposons le contraire et soit *ABC* un tel triangle équilatéral.
- Les parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées issues de *A* et *B* respectivement




- se coupent en un point *D*, pour former un triangle rectangle en *D*, *ABD*, inscrit dans le réseau.
- Soient *a* et *b* les longueurs de *AD* et *BD* respectivement.
- Alors la longueur de la base ( l'hypothénus) *AB* est égale à $s = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Celle de la hauteur du triangle $ABC$ est alors égale à

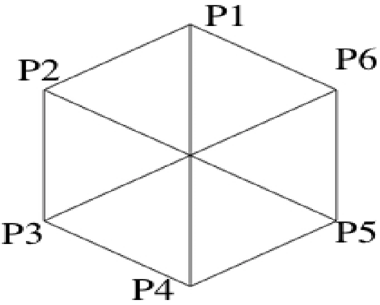
$$\sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

- L'aire du triangle $ABC$ est donnée par la formule consacrée : la moitié du produit de la base par la hauteur :
- elle est ainsi égale à $\frac{1}{2} \times s \times \frac{\sqrt{3}}{2}s = \sqrt{3}\left(\frac{s^2}{4}\right)$.
- Mais, la formule de Pick, nous dit que l'aire de tout triangle inscrit dans un réseau est un nombre rationnel.
- On a donc une contradiction, car $\sqrt{3}$ est irrationnel ; ceci termine la preuve.

3) Qu'en est-il d'un hexagone, peut-on l'inscrire dans le réseau $\mathbb{Z}^2$.

**Réponse : On ne peut inscrire un hexagone dans le réseau $\mathbb{Z}^2$.**

En effet, un hexagone se décompose en 6 triangles équilatéraux égaux.



Soit $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ et $P_6$ les sommets de l'hexagone $H$.

Le sommet commun $O$ à ces triangles est à coordonnées dans $\mathbb{Z}^2$.

Ce sommet est obtenu, par exemple par translation de $P_1$ par le vecteur $\overrightarrow{P_2P_3}$,

comme, ils sont à coordonées entières, il en est de même $O$.

si on appelle $s$ la longeur des côtes alors l'aire de $H$ est égale à

$$6 \times \sqrt{3}\left(\frac{s^2}{4}\right) = 3\sqrt{3}\left(\frac{s^2}{2}\right)$$

qui n'est pas rationnel

- ce qui contredit le théorème de Pick.

### Définition

*Un polygone **régulier** est un polygone à la fois équilatéral (tous ses côtés ont la même longueur) et équiangle (tous ses angles ont la même mesure).*

- La mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés est $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$.

  Plus généralement on a

### Théorème

*Le seul polygone régulier inscriptible dans le réseau carré $\mathbb{Z}^2$ est le carré.*

**Preuve :**

On a déjà vu que le carré est inscriptible, mais le triangle équilatéral et l'hexagone ne le sont pas.

Soit $n \geq 5$ et $n \neq 6$.

Supposons qu'il existe un polygone régulier à $n$-sommets dont les sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$.

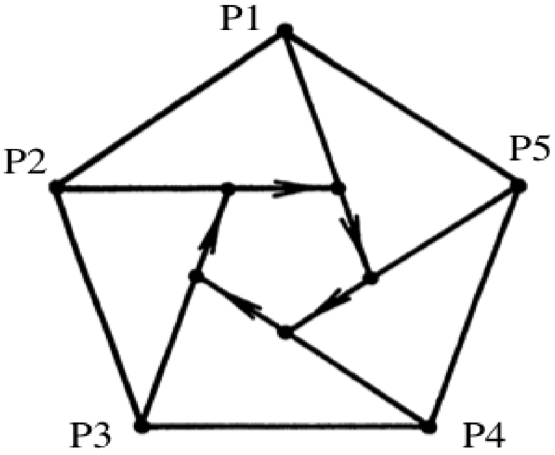
Soit $P$ un polygone régulier à $n$-sommets dont les côtés sont de longueur minimale.

Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les sommets du polygone $P$.

On translate les sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ par les vecteurs $\overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_2}$ respectivement (voir figure) .

On obtient alors $n$ points du réseau, qui forment aussi un polygone régulier, mais celui-ci à des côtés plus petits, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité.

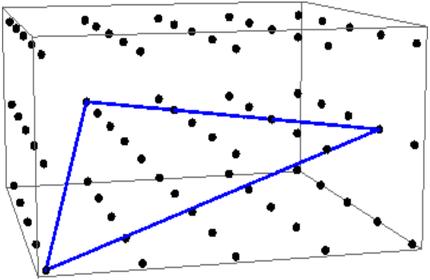
# Quelques exercices



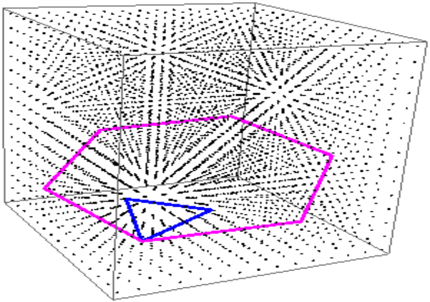

translation des sommets

- On peut se demander quels sont les polygones réguliers inscriptibles dans le réseau carré en dimension supérieure ($\geq 3$),
- Par exemple, on peut inscrire un triangle equilatéral et un hexagone dans $\mathbb{Z}^3$ :

  le triangle de sommets $(0,0,0),(4,1,1)$ et $(1,4,1)$ est équilatéral



le polygone de sommets $(0,0,0),(7,-2,1),(12,3,3),(10,10,4),(3,12,3)$ et $(-2,7,1)$ est un hexagone.



- Une généralisation du résultat précédent :

### THÉORÈME

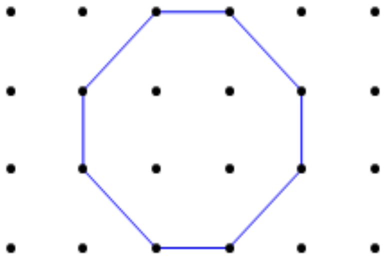
Soit $d$ un entier $\geq 3$. Les seuls polygones réguliers inscriptibles dans $\mathbb{Z}^d$ sont : le carré, le triangle équilatéral et l'hexagone.

# QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATIONS

Encore une autre généralisation du résultat précédent :

### DÉFINITION

Un polygone équiangle est un polygone dont les angles internes sont égaux.



### EXEMPLES

Tout polygone régulier, un rectangle etc... sont equiangles.

Un losange n'est pas en général équiangle.

- On a le résultat suivant :

**Théorème**

*Le rectangle et l'octogone sont les seuls polygones équiangles qu'on peut inscrire dans le réseau* $\mathbb{Z}^2$.

### Définition : l'indicatrice d'Euler

L'indicatrice d'Euler est la fonction qui associe à entier naturel non nul $n$, le nombre $\varphi(n)$ d'entiers $p$ compris entre 1 et $n$ et qui sont premiers avec $n$.

Exemples : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, etc..
si $p$ est un nombre premier alors $\varphi(p) = p - 1$.

- En fait on a une formule pour l'indicatrice d'Euler

**Lemme**

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$n = p_1^{\alpha_1}\dots p_1^{\alpha_k}$ est la décomposition de $n$ en facteurs premiers.

- **Exemples :** si $p$ est premier alors $\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$

  Si $n = 99 = 3^2 \times 11$, d'où $\varphi(99) = 99\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) = 3 \times 2 \times 10 = 60.$

### DÉFINITION

Un nombre est dit **algébrique** si il est la racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Le degré d'un nombre algébrique est est le minimum des degrés des polynômes dont il est la racine.

Exemple : $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique de degré 2, il est la racine de $X^2 - 2 = 0$.
Le nombre $\pi$ n'est pas un nombre algébrique.

# La preuve du théorème 0.3

- La preuve du théorème utilise le lemme suivant (que nous donnons sans démonstration)

### Lemme de Lehmer

Pour $n \geq 2$, le nombre $2\cos(\frac{2\pi}{n})$ est algébrique de degré $\frac{\varphi(n)}{2}$.

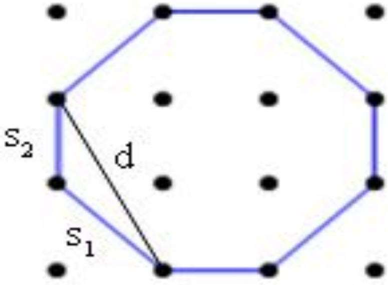
### Exemple

Si $n = 12$, $\varphi(12) = 4$ et le polynôme minimal de $\cos\dfrac{2\pi}{12}$ est $P = 4X^2 - 3$

il est de degré $\frac{\varphi(n)}{2} = 2$

en effet, $\cos\dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $P(\cos\dfrac{2\pi}{12}) = 4(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 - 3 = 0$.

Soit $d$ le troixième côté du triangle alors $s_1^2, s_2^2$ and $d^2$ sont des entiers.




L'angle intérieur est $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ et $\cos\dfrac{(n-2)\pi}{n} = -\cos\dfrac{2\pi}{n}$ et la loi des cosinus donne :

$$d^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos\frac{2\pi}{n}.$$

Ainsi $\cos \dfrac{2\pi}{n}$ est de la forme $a\sqrt{b}$ où $a$ et $b$ sont des entiers.

d'où $\cos \dfrac{2\pi}{n}$ est un entier algébrique de degré au plus 2, par suite $\varphi(n) \leq 4$.

- Les seules valeurs possibles de $n$ sont alors : $3, 4, 5, 6, 8, 10$ et $12$.
- On remarque que pour des sommets entiers la valeur de $\tan \dfrac{2\pi}{n}$ est soit rationnelle soit infinie,

  et pour $n = 4$ elle est infinie alors que pour $n = 8$ est égale à 1.
- les autres valeurs sont exclues car $\tan \dfrac{2\pi}{n}$ est irrationnelle pour $n = 3, 5, 6, 10$ et 12.
- Par conséquent $n = 4$ ou 8, d'autre part on a vu que le rectangle et l'octogone sont inscriptibles. Ce qui termine la preuve du Théorème 0.3

### DÉFINTION

Pour tout entier $n \geq 1$, la **suite de Farey d'ordre n** est la suite croissante $\mathscr{F}_n$ de fractions irrédutibles de nombre dans $[0,1]$ dont le dénominateur est $\leq n$

$$\mathscr{F}_n = \left\{ \frac{p}{q} \quad \Big| \qquad p, q \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p \leq q \leq n, \ \ \mathrm{PGCD}(p,q) = 1 \right\}$$

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

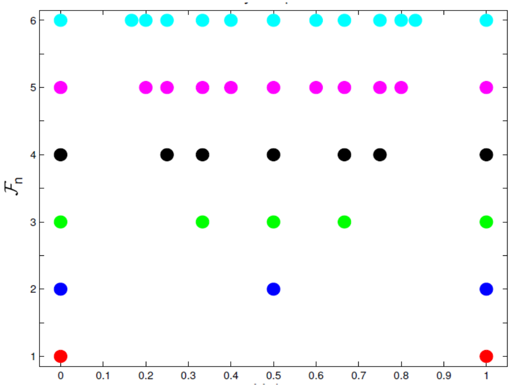
# SUITE DE FAREY

## EXEMPLES :

$$\mathscr{F}_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$\mathscr{F}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$\mathscr{F}_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$\mathscr{F}_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$\mathscr{F}_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$\mathscr{F}_6 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right\}$$

etc ...

# SUITE DE FAREY



## RAPPEL : L'IDENTITÉ DE BÉZOUT :

1) Deux entiers $p$ et $q$ sont premiers entre-eux c'est-à-dire $PGCD(p,q) = 1$ si et seulement si il existe deux entiers (relatifs) $u_0$ et $v_0$ telle l'identité de Bézout est satisfaite :

$$u_0 p + v_0 q = 1 \tag{1}$$

2) Les solutions de (1) sont de la forme $u = u_0 + kq$ et $v = v_0 - kq$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

## EXEMPLE

L'algorithme d'Euclide étendu appliqué à $p = 97$ et $q = 18$ donne $u = -5$ et $v = 27$.

$$\begin{aligned} 97 &= 5 \times 18 + 7 & \qquad 7 &= 1 \times 97 - 5 \times 18 \\ 18 &= 2 \times 7 + 4 & 4 &= -2 \times 97 + 11 \times 18 \\ 7 &= 1 \times 4 + 3 & 3 &= 3 \times 97 - 16 \times 18 \\ 4 &= 1 \times 3 + 1 & 1 &= -5 \times 97 + 27 \times 18 \end{aligned}$$

# Suite de Farey

## Propriétés

Soit $\mathscr{F}_n$ la suite Farey d'ordre $n$ alors :

1. pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$$
2. Soient $\frac{a}{q} < \frac{b}{r}$ deux éléments consécutifs de $\mathscr{F}_n$ alors
$$qb - ar = 1.$$
3. Soient 3 éléments consécutifs de $\mathscr{F}_n$, $\frac{a}{q} < \frac{c}{s} < \frac{b}{r}$ alors :
$$\frac{c}{s} = \frac{a+b}{q+r}$$
On dit que $\frac{a+b}{q+r}$ est la fraction médiane de $\frac{a}{q}$ et $\frac{b}{r}$. ( $\frac{a+b}{q+r}$ elle n'est pas forcément irréductible)

Soit $\mathscr{F}_n$ la suite Farey d'ordre $n$ : alors

1. Par définition de la suite de $\mathscr{F}_n$ et $n+1>n$.
2. Comme $PGCD(a,\ q)=1$ on peut trouver des entiers naturels $x$ et $y$ tels que $n-q<y\leq n$ et $1=qx-ay$.
   Alors $x=\frac{ay+1}{q}$ et $PGCD(x,\ y)=1$. Ainsi $\frac{x}{y}\in\mathscr{F}_n$.
   De plus $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{q}+\dfrac{1}{qy}$,
   donc $\dfrac{x}{y}$ arrive après $\dfrac{a}{q}$ dans la suite.
   Si ce n'est par $\frac{b}{r}$, alors
   $$\frac{x}{y}-\frac{b}{r}=\frac{xr-by}{yr}\geq\frac{1}{yr}$$
   et
   $$\frac{b}{r}-\frac{a}{q}=\frac{bq-ar}{rq}\geq\frac{1}{rq}.$$

Ainsi

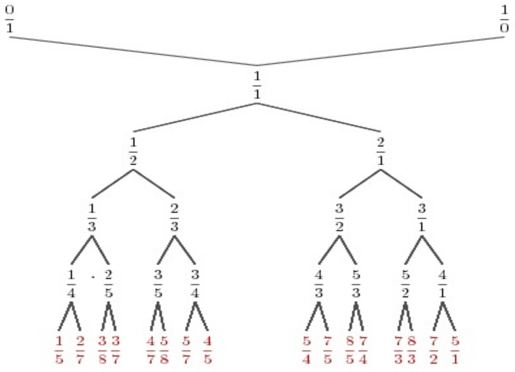
$$\frac{1}{yq} = \frac{x}{y} - \frac{a}{q} \geq \frac{1}{yr} + \frac{1}{rq} = \frac{y+q}{yrq} > \frac{n}{yrq} \geq \frac{1}{yq}$$

ce qui est absurde.

1. D'après 1), $qc - as = 1$ et $sb - cr = 1$. D'où $c(qb - ar) = b + a$ et $s(bq - ar) = q + r$. Par conséquent $\frac{c}{s} = \frac{a+b}{q+r}$ d'où le résultat.

## APPLICATIONS

- Pour toute fraction irréductible $0 < \frac{c}{d} < 1$, il existe $0 < n < d$ et deux fractions $\frac{a}{q}$ et $\frac{b}{r}$ de $\mathscr{F}_n$ telles que $\frac{c}{d}$ est la fraction médiane.
- Cette dernière propriété montre que toute fraction irréductible peut être atteinte en prenant la médiane de deux fractions irréductibles de dénominateurs plus petits ;
- Cette propriété est utilisée pour construire l'arbre de Stern-Brocot qui représente tous rationnel positif sous forme de fraction irréductible.




l'arbre de Stern-Brocot

On pose $\frac{1}{0} = +\infty$

## APPLICATIONS

- Combien y a-t-il d'éléments dans la suite de Farey d'ordre $n$ ?
- On peut le calculer par récurrence par la formule :

$$|\mathscr{F}_{n+1}| = |\mathscr{F}_n| + \varphi(n+1)$$

  où $|\mathscr{F}_n|$ est le cardinal de l'ensemble $\mathscr{F}_n$ et $\varphi$ est la fonction indicatrice d'Euler.
- On a $|\mathscr{F}_1| = 2$, $|\mathscr{F}_2| = 3$ Sachant que cardinal de $|\mathscr{F}_6| = 13$ on aura $|\mathscr{F}_7| = |\mathscr{F}_6| + \varphi(7) = 13 + 6 = 19$.
- **Exercice** : 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|\mathscr{F}_n| = \varphi(1) + \cdots + \varphi(n).$$

  2) Calculer $|\mathscr{F}_{10}|$.

### PROPOSITION

Soit $OAB$ un triangle de sommets entiers $O = (0,0), A = (p,q)$ et $B = (r,s)$.
Les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux éléments consécutifs d'une suite de Farey si et seulement si le triangle $OAB$ est primitif.
En particulier, l'aire de tout triangle primitif est égale à $\frac{1}{2}$.

## PREUVE

Quitte à faire une translation on peut supposer que l'un des sommets est l'origine.

- On suppose que les rationnels $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ sont deux éléments consécutifs d'une suite de Farey alors l'aire de $OAB$ est donnée par la formule :

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} p & q & 1 \\ r & s & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|ps - qr| = \frac{1}{2}$$

  puisque deux éléments consécutifs vérifient $|ps - qr| = 1$.
  $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ désigne le produit vectoriel des vecteur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

- Réciproquement, si le triangle de sommets $O = (0,0), A = (p,q)$ et $B = (r,s)$ est primitif, alors $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont des éléments consécutifs sinon la fraction médiane $\frac{p+r}{q+s}$ serait strictement comprise entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ et donc le point correspondant serait un noeud du réseau à l'intérieur ou sur le bord du triangle, contredit le fait que le triangle est primitif.