MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

UFR de Mathématiques
Université de Rennes 1

18 mars 2016

Adresse de la page du cours

http://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka/MG.html

Mes coordonnées : Karim BEKKA

Bureau : n°613 (6eme étage du Bâtiment 22)

email : karim.bekka@ univ-rennes1.fr

SÉANCE 2 : POLYGONES ET FORMULE DE PICK

1 POLYGONES

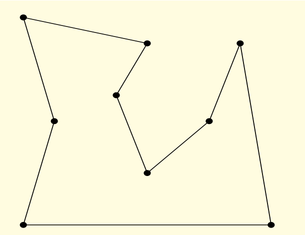
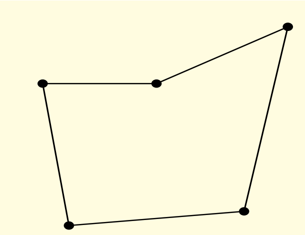
Introduction

- Un polygone est une ligne brisée fermée.
- Se donner un polygone revient donc à se donner une suite finie $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ de points du plan
- définissant les n segments $[A_0, A_1], \ldots, [A_{n-2}A_{n-1}], [A_{n-1}A_0]$.
  Les points A_i (resp. les segments $[A_i, A_{i+1}]$) sont appelés les sommets (resp. les côtés ou arêtes) du polygone $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$.
- Nous supposerons raisonnablement que trois sommets consécutifs du polygone ne sont jamais alignés, autrement dit que les trois points A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ne sont pas alignés quelque soit l'entier i.

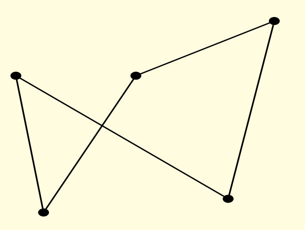
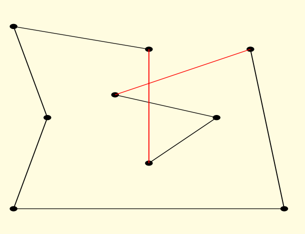
Polygone simple

- Un polygone est **simple** s'il ne s'intercepte pas lui même, si deux quelconques de ses arêtes sont toujours disjointes. Un polygone simple est aussi appelé "polygone de Jordan".
- Un polygone qui n'est pas simple est dit **croisé ou complexe**

POLYGONE SIMPLE

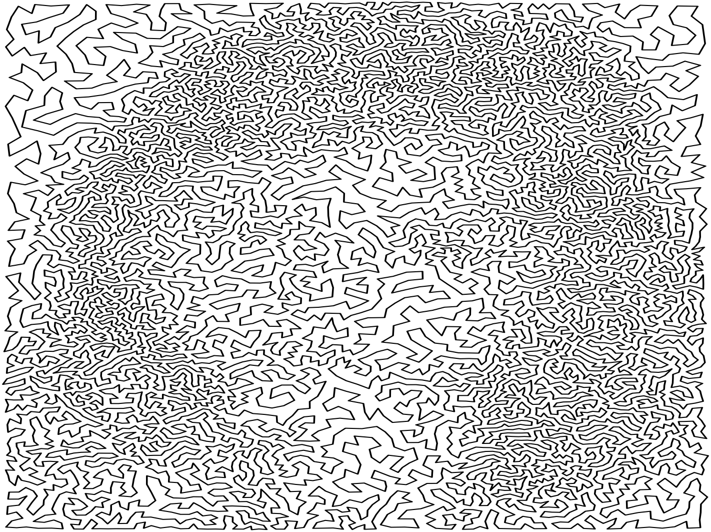
-  

  Polygones simples

-  

  Polygones croisés (ou complexes)

- Même un polygone simple, peut être compliqué
  ,



- Néanmoins on a le résultat suivant.

THÉORÈME (JORDAN 1910)

Tout polygone simple divise le plan en deux régions disjointes, l'une extérieure, l'autre intérieure, dont il est le bord.

- Comment déterminer l'intérieur et l'extérieur ?

- Soit P un point. Il est facile de tester si ce point est intérieur :

1) On prends un cercle C qui entoure P et qui a aucun point en commun avec P.

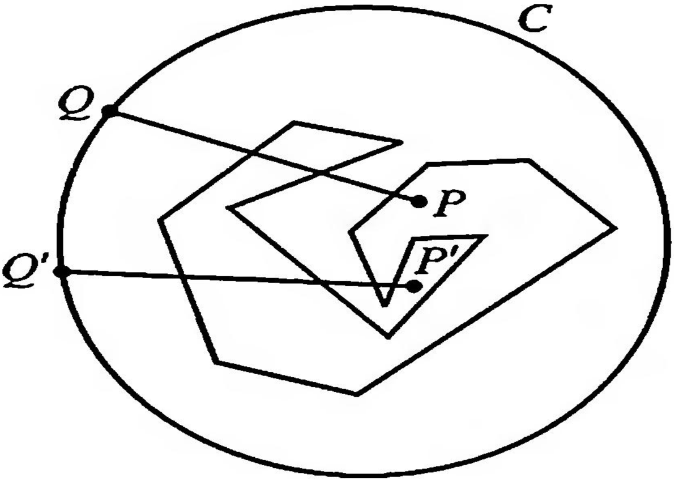
   (un tel cercle existe toujours, puisqu'un polygone, n'a qu'un nombre fini de sommets.)

2) On déssine un segment d'origine P, qui évite les sommets du polygone et qui coupe le cercle C, en un point Q.
3) Maintenant on compte le nombre de points d'intersection du segment $[PQ]$ avec le polygone :

- si ce nombre est impair, le point P est à l'intérieur
- si ce nombre est pair, le point P est à l'extérieur

POLYGONE SIMPLE

,



Réseaux du plan

- Un **réseau** de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}^2$ de la forme

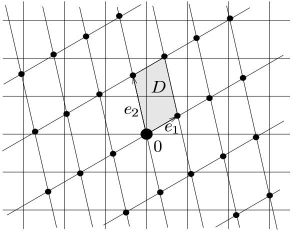
$$\{me_1 + ne_2 \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

- où $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Un point du réseau est appelé un **noeud**.

Exemple

- Si $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, alors le réseau obtenu n'est autre que $\mathbb{Z}^2$.
- On obtient aussi $\mathbb{Z}^2$ si on prend comme base $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (1,1)$.

Réseaux du plan



Soit $\Gamma = \{me_1 + ne_2 \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ un réseau de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\{v_1, v_2\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^2$. Alors

$\Gamma = \{mv_1 + nv_2 \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ si et seulement si la matrice de passage $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de la base $\{e_1, e_2\}$ vers la base $\{v_1, v_2\}$ est telle que a, b, c et d sont des entiers et la valeur absolue du déterminant de M est égale à 1 c'est-à-dire
$|ad - bc| = 1$.

- On souhaiterait maintenant "apprivoiser" des figures géométriques en les inscrivant dans un réseau de carreaux de coté unité c'est à dire des sommets dans $\mathbb{Z}^2$:

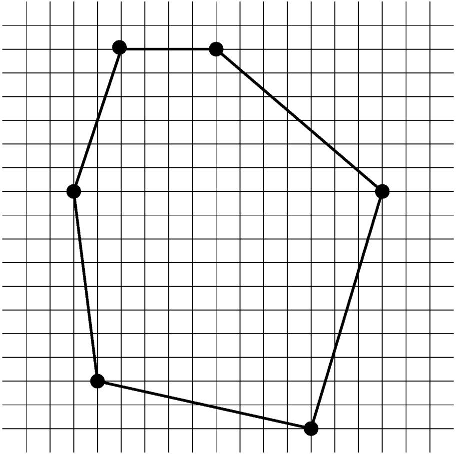


FIG.1-*Polygone dans un réseau*

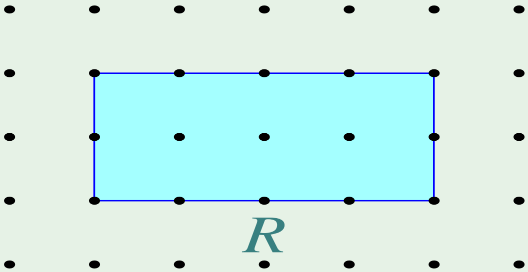
- Le problème proposé ici est de prouver qu'on peut calculer l'aire d'un polygone dans un réseau en comptant seulement les points intérieurs et les points sur sa frontière.
- Par exemple si T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ alors son aire $\mathscr{A}(T) = \frac{1}{2}$.
- D'autre part T n'a aucun point intérieur ($I_T = 0$) et n'a que 3 points sur le bord, à savoir ses sommets, ($B_T = 3$.)
- Ainsi "le nombre de points intérieurs"+ la moitié "du nombre de points sur le bord"$-1 = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} =$ Aire de T.

EXEMPLES :

- Soit R le rectangle représenté dans la figure ci-desous, on sait que son aire est égale à $\mathscr{A}(R) = ab = 2.4 = 8$.

  D'autre part le nombre de points entiers intérieurs de R est $I_R = 3$ le nombre de points entiers sur le bord de R est $B_R = 12$

  d'où $I_R + \frac{B_R}{2} - 1 = 3 + 6 - 1 = 8 = \mathscr{A}(T)$.

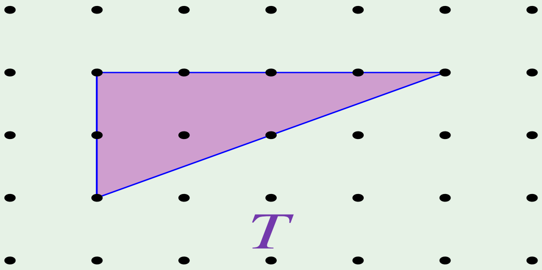


EXEMPLES :

- Soit T un triangle rectangle représenté dans la figure ci-desous, on sait que son aire est égale à $\mathscr{A}(T) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}2.4 = 4$.

  D'autre part le nombre de points entiers intérieurs de T est $I_T = 1$ le nombre de points entiers sur le bord de T est $B_T = 8$

  d'où $I_T + \frac{B_T}{2} - 1 = 1 + 4 - 1 = 4 = \mathscr{A}(T)$.



Propriété des aires

- On désigne par noeud un point du plan à coordonnées entières.
- On a plus généralement :

Théorème

Soit P un polygone simple (sans croisements) dans un réseau de carrés de coté unité. Alors

$$\mathscr{A}(P) = I_p + \frac{B_P}{2} - 1$$

où $\mathscr{A}(P) =$ *l'aire de* P, $I_p =$ *le nombre de noeuds intérieurs* et $B_P =$ *le nombre de noeuds sur la frontière*.

- La formule précédente est appelée formule de Pick.

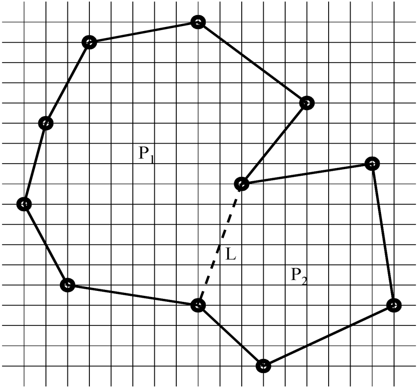
- Montrons que cette formule se comporte bien lorsqu'on décompose le polygone P en deux polygones P_1 et P_2 ayant un seul côté en commun, cela revient à montrer que si la formule est vraie pour P_1 et P_2 alors elle est vraie pour P.
- 

FIG. 2-Décomposition de P en P_1 et P_2.

- Etant donné un polygone P obtenu en accolant à un côté deux polygones P_1 et P_2.
  Comme la formule de Pick est supposée vraie pour P_1 et P_2 on a :
  $$\mathscr{A}(P) = (I_{P_1} + \frac{1}{2}B_{P_1} - 1) + (I_{P_2} + \frac{1}{2}B_{P_2} - 1)$$
  Soit c le nombre de points sur le côté commun à P_1 et P_2. On a :
  $$I_P = (I_{P_1} + I_{P_2}) + (c-2)$$
  $$B_P = (B_{P_1} - c) + (B_{P_2} - c) + 2$$
  On en dédult que :
  $$\mathscr{A}(P) = I_P - (c-2) + \frac{1}{2}(B_P + 2(c-2) + 2) - 2$$
  Ainsi
  $$\mathscr{A}(P) = I_P + \frac{1}{2}B_P - 1$$

PREMIÈRE ÉTAPE

- On a donc montré que la formule de Pick est additive, comme la mesure de l'aire, $\mathscr{A}(P) = \mathscr{A}(P_1) + \mathscr{A}(P_2)$
- On peut décomposer successivement le polygone P en polygones sur le réseau, jusqu à n'avoir que des polygones avec le moins de cotés possible :
- c'est-à-dire des triangles. Ainsi la preuve de la formule se ramène au cas des triangles.

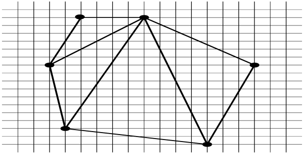
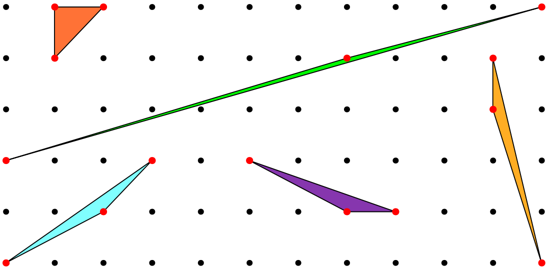


FIG. 3-Décomposition en triangles.

- **Question 1** : comment trianguler un polygone ? Quelle est la façon la plus algorithmique ?
- **Question 2** : comment compter le nombre de noeuds intérieurs d'un polygone ? et sur le bord ?

DÉFINITION

Un triangle est dit primitif s'il n'a pas de noeud intérieur, ni sur le bord, autres que ses sommets.



PROPOSITION

Tout polygone sur le réseau peut être décomposé en triangles primitifs.

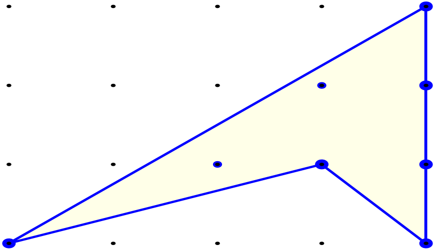
- L'existence d'une telle triangulation peut s'expliquer, en introduisant le jeux suivant :
- Le jeux consite à décomposer à chaque étape le polygone (à sommets entiers) en deux polygones à sommets entiers, en utilisant l'une des deux règles suivantes :

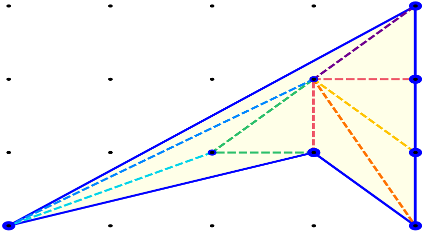
1) le joueur choisit deux points entiers du bord, et les relie par un segment entièrement contenu dans l'intérieur du polygone
2) le joueur choisit deux points entiers du bord, et les relie à un point entier de l'intérieur du polygone

SECONDE ÉTAPE

- À chaque tour, le joueur choisit un (sous) polygone de la décomposition et applique l'une des deux pour le décomposer en deux (sous) polygones.
- le jeux se termine, quand il n'y a plus de polygone à decomposer.
- Le gagnant est celui qui a réalisé le dernier mouvement.
- Ainsi, le jeux est terminé lorsqu'il n'y a plus de points entiers à relier, ni de diagonal entre points entiers :
- c'est à dire que le polygone est décomposé en triangles primitifs.

- Voici un exemple d'une telle triangulation.





- On va introduire maintenant : la *formule d'Euler*,

  cette formule a montré son utilité dans enormément de problèmes, et en particulier pour celui-ci.
- Soit un polygone P décomposé en triangles.
- Notons par S le nombre total de sommets, par C le nombre de cotés, et par T le nombre de triangles.
- Par exemple, dans la Figure 4 ci-dessous, on a $S = 9,\ C = 17,\ T = 9$. Considérons le calcul suivant : $S - C + T = 9 - 17 + 9 = 1$.
- On peut experimenter : on prend un polygone, on le décompose en triangles de façon arbitraire et ensuite on calcule l'expression $S - C + T$.
- Le résultat semble être toujours égal à 1. Est-ce une coincidence ?

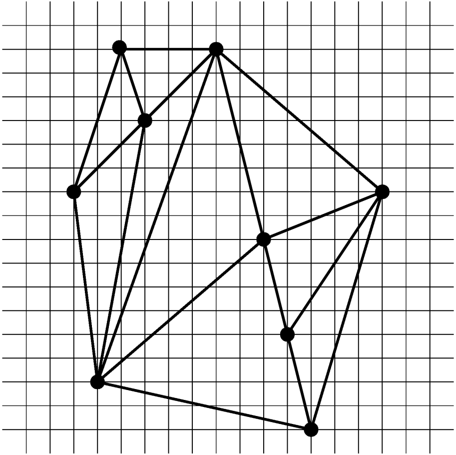


FIG.4-Décomposition plus fine en triangles .

FORMULE D'EULER

Pour tout polygone P simple et toute décomposition en triangles de P, on a la formule d'Euler suivante :

$$\text{S-C+T} = 1$$

Preuve

On s'imagine que le polygone P est une île entourée par la mer et que les cotés de P sont des digues. Que se passe-t-il quand on supprime l'une des digues qui a de l'eau d'un seul coté ?
Un triangle disparaît, un coté est supprimé et le nombre de sommets ne change pas. Par cette opération la formule d'Euler n'a pas changé non plus. On termine la preuve par une récurrence sur le nombre de côtés.

- La formule d'Euler permet de calculer le nombre de triangles dans une décomposition de P en triangles primitifs.

LEMME

Le nombre de triangles dans une triangulation en triangles primitifs de P est égal à :

$$2I_P + B_P - 2,$$

où I_P est le nombre de noeuds intérieurs de P et B_P est le nombre de noeuds sur le bord de P.

Preuve du Lemme

- On va calculer le nombre de côtés de deux façon et utiliser la formule d'Euler.
- Comme chaque triangle contribue à 3 côtés, chaque côtés intérieur est compté 2 fois et chaque côté exterieur (sur le bord) une fois on aura :
- $$3T = 2C_{int} + C_{ext}$$
- D'autre part, puisque P est un polygone simple, le nombre de sommets sur le bord est égal au nombre de côtés extérieurs
- $$B_p = C_{ext}.$$
- On a aussi $S = I_p + B_p$ et $C = C_{int} + C_{ext}$

PREUVE DU LEMME : SUITE

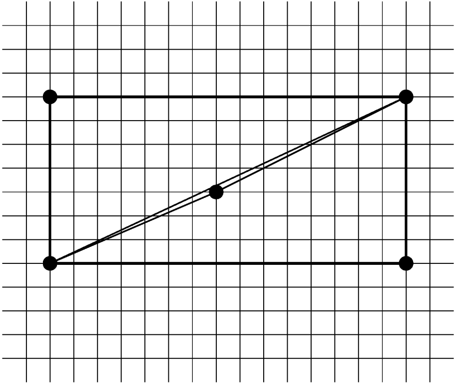
- Finalement, en considérant la formule d'Euler $S - C + T = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} T &= -2T + 2C_{int} + C_{ext} \\ &= -2T + 2C - C_{ext} \\ &= 2(C - T) - B_p \\ &= 2(S - 1) - B_p \\ &= 2I_p + B_p - 2 \end{aligned}$$

LEMME

L'aire de tout triangle primitif est égale à $\frac{1}{2}$.

- **Preuve :**
- Si le triangle primitif a un coté horizontal ou vertical sur le réseau, alors la preuve est claire : on se ramène par une isométrie au cas d'un triangle de sommets (0,0), (0,1) et (1,0).
- Sinon, tous les cotés sont obliques et on sélectionne le plus grand d'entre eux. Il est la diagonale d'un rectangle sur le réseau.
- Montrer d'abord que le 3^{eme} sommet de notre triangle se trouve à l'intérieur de ce rectangle. (utiliser bien sûr que le triangle est primitif)
- Les triangles primitifs avec des cotés obliques sont tous très aplatis.
- En règle générale, les dessins sont de toute façon seulement pour s'orienter, ils ne font pas une preuve.



- Ajoutant quelques notations à la figure. Le triangle primitif est noté AEC. Les distances entre les lignes pointillées sont exprimées par les entiers positifs $p,\ q,\ r,\ s$. Ainsi $AB = p + q$ et $BC = r + s$. Le premier calcul c'est l'aire de AEC en fonction des entiers $p,\ q,\ r,\ s$. Ainsi :

$$\mathscr{A}_{AEC} = \frac{1}{2}(p+q)(r+s) - qs - \frac{1}{2}rq - \frac{1}{2}\ ps.$$

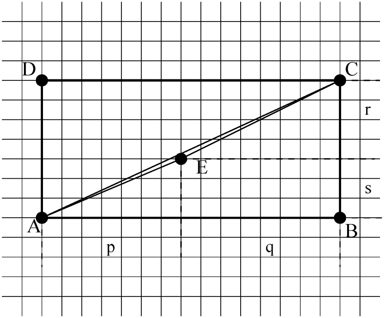


FIG. 2 –*Notations*.

- Il va falloir prouver donc que $\mathscr{A}_{AEC} = \frac{1}{2}$, ce qui revient à l'égalité suivante, après simplification :

$$(2) \quad pr - qs = 1.$$

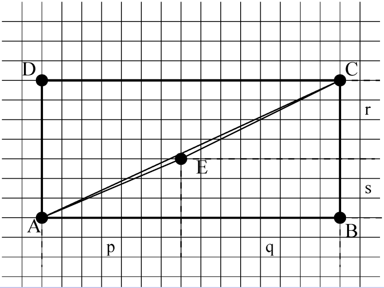
- Pour montrer cette égalité, on calcule le nombre de noeuds dans le demi rectangle *ABC* (qui contient notre triangle primitif AEC) en fonction de *p*, *q*, *r*, *s*. Pour ceci, il nous faut le résultat suivant.

LEMME

Le nombre de noeuds sur un triangle rectangle avec les cotés le long du réseau et dont l'hypoténuse ne contient pas de noeuds autres que les sommets est

$$\frac{1}{2}(a+1)(b+1)+1$$

où $a, \ b \in \mathbb{N}$ sont les longueurs des cotés en angle droit.



- On a donc notre triangle AEC, deux triangles rectangles et un petit rectangle.
- Remarquons que le triangle AEC ainsi que ses cotés ne contiennent pas de noeuds autres que les sommets $A,\ E,\ C$. Il est clair que le nombre de noeuds sur le petit rectangle est $(q+1)(s+1)$.
- On utilise le lemme ci-dessus pour poursuivre les calculs. Ensuite assembler les figures (attention à ne pas compter plusieurs fois un même noeud !).
- Écrire l'égalité issue des deux calculs différents du nombre des noeuds dans ABC et simplifier cette équation. Si tout est bien fait, on trouvera à la fin la relation $pr - qs = 1$, donc ce qu'il fallait prouver.

EXERCICE

Vérifier les calculs

-

En résumé :

Théorème de Pick

Tout polygone simple P inscrit dans un réseau admet une triangulation primitive, de plus

- L'aire de tout triangle primitif est égale à $\frac{1}{2}$.
- Le nombre de triangles primitifs dans la triangulation de P est égal à

$$2I_p + B_p - 2$$

  où I_p et B_p sont respectivement les nombres des noeuds du réseau intérieurs et sur le bord de P.
- En particulier l'aire de P se calcul par la formule $I_p + \dfrac{B_p}{2} - 1$.