3.3.3 Changement de variable

Si F est une primitive de f et si g est une fonction, alors la formule de dérivation diune fonction composée donne quela dérivée de $F \circ g$ est égale à $(F' \circ g)(x)g'(x)$, ainsi la fonction $F \circ g$ est une primitive de $(f \circ g)g'$.

L'application pratique de ce résultat à la recherche des primitives se présente sous deux aspects :

I) Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \varphi[u(x)]u'(x)$ où φ est une fonction continue dont Φ est une primitive et si u est à dérivée continue, alors :

$$f(x)dx = \varphi(u)u'(x)dx.$$

En posant $du = u'(x)dx$ on obtient

$$\int f(x)dx = \int \varphi(u)du = \Phi(u(x)) + C$$

3.3.3 EXEMPLE.

1. Soit à calculer $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$.
   On pose $u(x) = \cos(x)$ dont la différentielle est $du = -\sin(x)\,dx$.
   Alors $\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u(x)| + C = -\ln|\cos x| + C$.
2. Soit à calculer $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
   On pose $u(x) = 1 - x^2$ donc $du = -2x\,dx$. On obtient alors
   $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u(x)} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$.
3. Supposons que l'on veuille calculer

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

   Nous allons faire un changement de variable : passer de la variable x à la variable u. Soit $u = 1 + x^2$. La différentielle de u est $du = 2x\,dx$. On écrit
   $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$
   et on vérifie bien que l'on obtient $2x\sqrt{x^2+1}$ en dérivant cette expression.

II) *Pour obtenir une expression plus simple de l'élément différentiel, il peut être utile d'effectuer un changement de variable en posant $x = \varphi(t)$ dont la différentielle est $dx = \varphi'(t)\,dt$ dans ces conditions :*

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int g(t)\,dt \\ &= G(t) + C\end{aligned}$$

où G est une primitive de g.

3.3.4 EXEMPLE.

1. Soit à calculer $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$. On pose $x = \ln(t)$ avec $t \in]0, +\infty[$, la différentielle s'écrit $dx = \frac{dt}{t}$ et $1 + e^x = 1 + t$. Il s'en suit :

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{t}{(1+t)t}\,dt = \int \frac{dt}{1+t}\,dt = \ln(|1+t|) + C = \ln(1+t) + C$$

   puisque $t > 0$. Comme $x = \ln(t) \Leftrightarrow t = e^x$, Ainsi $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x) + C$.

2. Pour déterminer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ on pose $x = \sin t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la différentielle s'écrit $dx = \cos t\, dt$ et $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$. Il s'en suit :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)} dt = \int dt = t + C.$$

L'inverse de la fonction sin est arcsin, d'où $x = \sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin(x)$,
Ainsi $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$.

3.3.5 REMARQUE
La méthode d'intégration par changement de variable n'a d'autre but que de remplacer une intégrale compliquée par une intégrale plus simple. La difficulté majeure consiste à trouver le changement de variable qui convient. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparait sous le signe d'intégration et dont la différentielle s'y trouve aussi à un facteur constant près. Ce n'est pas facile, si le premier choix n'est pas le bon, en tenter d'autres... En pratique on donnera le changement de variable à effectuer.

3.3.6 Exercice Par changement de variable, calculer : $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+5} dx$ et $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+4} dx$

3.4 Notion d'intégrale (définie)

3.4.1 DÉFINITION
On appelle intégrale de a à b d'une fonction f continue sur un intervalle I, avec a et b dans I, la différence $F(b) - F(a)$, F étant une primitive quelconque de f sur I. Cette intégrale est notée

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

Ainsi, par définition :
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *ce que l'on écrit aussi :On note* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
L'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *se lit* $\langle\langle$ *intégrale (ou somme) de a à b de* $f(x)dx$ $\rangle\rangle$.

3.4.2 REMARQUE

1. Vérifions que dans la définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive. Soit G, une autre primitive de f sur I, alors il existe une constante C telle que $G = F + C$.
   D'où $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. Donc la définition de l'intégrale est cohérente, elle est indépendante de la primitive choisie.
2. Cas où une borne de l'intégrale est variable
   Grâce à la définition précédente on a aussi :
   $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$.
   Dans ce cas, l'intégrale dont une bome est x est une primitive, en fait c'est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

3.4.3 EXEMPLE. $\displaystyle\int_0^1 (t^3 + t + 1)dt = \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = 1/4 + 1/2 + 1 = 7/4$.

3.4.1 Propriétés de l'intégrale

1)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2) **Relation de Chasles**
Avec a, b, et c sur un intervalle I où la fonction f est continue, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3) **Linéarité de l'intégrale :**
Soient α et β des constantes,
$\int_a^b (\alpha f(x) \ + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

4) **Positivité de l'intégrale et respect des inégalités :**
Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a,b]$ avec $b > a$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
Ainsi l'intégration respecte l'inégalité, lorsque les bornes sont dans le sens croissant.
En particulier :

(a) $f(\mathrm{x}) \geq 0$ *sur* $[a,b]$ *avec* $b > a$, *alors* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(b) $f(\mathrm{x}) \leq 0$ *sur* $[a,b]$ *avec* $b > a$, *alors* $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

3.4.4 EXEMPLE. 1) Calculer $\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$

Faisons une intégration par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin t$, d'où $u' = 1$ et $v = -\cos t$.
$\int_0^{\pi} t\sin t dt = [-t\cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt = -\pi\cos(\pi) + [\sin t]_0^{\pi} = -\pi\cos(\pi) = \pi.$

2) Calculer $\int_0^1 t^2 e^{-t} dt.$

Intégrons par parties en posant $u = t^2$ et $v' = e^{-t}$, d'où $u' = 2t$ et $v = -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$
$\int_0^1 t^2 e^{-t}\,dt = [-t^2 e^{-t}]_0^1 + 2\int_0^1 te^{-t}\,dt = -e^{-1} + 2\int_0^1 te^{-t}\,dt.$
Ce n'est pas fini : il faut encore faire baisser le degré de la puissance de t dans la nouvelle intégrale : posons $u = t$ et $v' = e^{-\mathrm{t}}$, d'où $u' = 1$ et $v = -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$
$\int_0^1 te^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}dt = -\frac{1}{e} - [e^{-t}]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1.$
Finalement $\int_0^1 t^2 e^{-t}dt = -\frac{1}{e} + 2(-\frac{2}{e} + 1) = 2 - \frac{5}{e}.$

3) Déterminer une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en $x = 1$.

Cela revient à calculer $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$. Il s'agit de la primitive de ln qui s'annule pour $x = 1$. Procédons à une intégration par parties en posant $u = \ln t$ et $v' = 1$. On en déduit $u' = 1/t$ et $v = t$. D'où $F(x) = [t \ \ln t]_1^x - \int_1^x 1\,dt = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$.

4) Pour déterminer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ on pose $x = \sin t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la différentielle s'écrit $dx = \cos t\, dt$ et $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$. Il s'en suit :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\, dt = \int dt = t + C.$$

Comme $x = \sin t$, les bornes de deviennent pour $x = 0$, $t = 0$ et pour $x = 1/2$, $t = \frac{\pi}{6}$ Ainsi

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$$

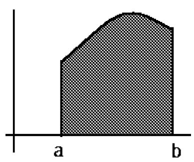
3.4.5 EXEMPLE. *de l'introduction* (*suite*).
En un an la population à augmenté de $W(1) - W(0) = \int_0^1 10^2 e^{0.1t} dt = 10^3 [e^{0,1t}]_0^1 = 105.17$.

3.4.6 REMARQUE

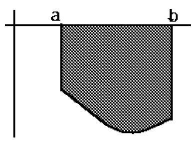
1. **Notion d'aire algébrique**

Géométriquement, l'intégrale de a à b de f représente l'aire 'algébrique' de l'ensemble des points situés entre la courbe de f et l'axe des abscisses dans un repère orthonormé.
A la différence de l'aire géométrique, toujours positive, l'aire algébrique peut être positive ou négative. Par définition, aire algébrique est égale à l'intégrale.
Voici les quatre cas de figure :

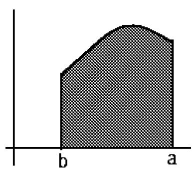
$f \geq 0$ sur [a,b] et $b > a$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ = aire géométrique = aire algébrique



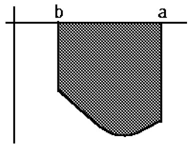
$f \leq 0$ sur $[a, b]$ et $b > a$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ = -aire géométrique = aire algébrique



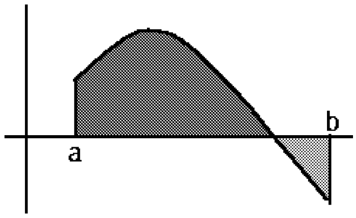
$f \geq 0$ sur [a,b] et $a > b$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ = -aire géométrique = aire algébrique



$f \leq 0$ sur $[a, b]$ et $a > b$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ = aire géométrique = aire algébrique



Conséquence : lorsqu'une fonction change de signe sur $[a, b]$ avec $b > a$, l'intégrale est toujours égale à aire algébrique, et celle-ci est la somme des aires (géométriques) situées au-dessus de l'axe des x, diminuée de celle des aires (géométriques) situées au- dessous de l'axe des x.



$\int_a^b f(x)dx =$ aire rouge-aire verte

2. Le symbole $\int$ fut introduit par Leibniz (1686) (et s'appelle intégrale ou somme). Il a la forme d'un S allongé justiffie par le fait qu'une intégrale est la limite d'une somme :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

où $x_0 = a,\ x_n = b$, $x_i = a + i(b-a)/n$ (*on peut choisir les x_i autrement*) et ζ_i un point quelconque de $[x_{i-1}, x_i]$ (par exemple $\zeta_i = x_i$). *Cette somme porte le nom de somme de Riemann.*

Si f est positive, elle correspond à la somme des aires (géométrique) des rectangles de hauteur $f(\zeta_i)$ et de largeur $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$.