Université de Rennes 1, Licence Biologie, S1 2014-2015
Mathématiques (Analyse)

Examen Terminal, 1$^{\text{ere}}$ session- Corrigé

Exercice 1 *(2,5 points)*

D'après le cours l'incertitude relative pour le poids du thon est égale à :

$$\frac{\triangle P}{P} = \frac{\triangle \alpha}{\alpha} + 3\frac{\triangle L}{L}$$

en utilisant le fait que α est une constante, et donc $\triangle\alpha = 0$, on obtient $\boxed{\frac{|\triangle P|}{P} = 3\frac{|\triangle L|}{L} \leq 3 \times 10\% = 30\%}$. Ainsi l'incertitude relative sur le poids du thon est de 30%.

Exercice 2 *(8,5 points)*

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

1. (a) Les fonctions exponentielle et $x \mapsto -x^2/2$ étant définies sur $\mathbb{R}$, leur composée $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ a donc pour domaine de définition $\boxed{D_g = \mathbb{R}.}$

   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(-x)^2/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} = g(x)$, ainsi g est paire.

   (b) Le calcul de la dérivée de g, on utilisant la dérivée de la composée, on a

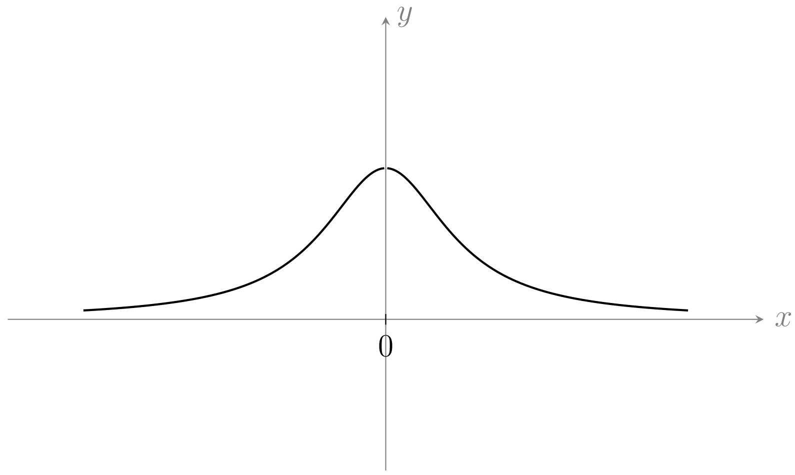
   $$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{e}^{-x^2/2})' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x\mathrm{e}^{-x^2/2}) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

   D'où $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

   (c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$
   et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0.$
   On déduit le tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'	0	$+$	0	$-$	0
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0

(d) Donner l'allure de la représentation graphique de g.



1. (a) Soit α un réel strictement positif.
D'après ce qui précede, on $g'(x) = -xg(x)$, d'où

$$\int_0^\alpha xg(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\alpha g'(x)\mathrm{d}x = g(\alpha) - g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{e}^{-\alpha^2/2} - 1).$$

Comme g est une fonction paire, la fonction $x \mapsto xg(x)$ est une fonction impaire, alors son intégrale sur un intervalle centré à l'origine est nulle, donc

$$\int_{-\alpha}^\alpha xg(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(b) On procède par une intégration par parties. En posant

$$u'(x) = xg(x) = -g'(x) \ \rightarrow u(x) = -g(x)$$

$$v(t) = x^2 \ \rightarrow v'(x) = 2x$$

on applique la formule d'intégration par parties :
$\int x^3 g(x)\,dx = -x^2 g(x) + 2\int xg(x)\,dx = -x^2 g(x) - 2\int g'(x)\,dx = -x^2 g(x) - 2g(x) + C.$
Ainsi les primitives de la fonctions f sont les fonctions

$$-(x^2+2)g(x) + C = -\frac{x^2+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} + C$$

où C est une constante réelle.

(c) Déterminons enfin la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$. On cherche C telle que : $-\frac{0^2+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-0^2/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.
D'où la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$ est la fonction $\boxed{F(x) = -\frac{x^2+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.}$

Exercice 3 *(6,5 points)*

1. (a) Les solutions de l'équation linéaire d'ordre 1 homogène $x'(t)+4x(t)\ =0$, sont de la forme $x(t) = Ce^{-4t}$ où C est une constante réelle.
   (b) Déterminons enfin la solution x vérifiant $x(0) = 1$. On cherche C telle que : $x(0) = Ce^{-0} = 1$, d'où $C = 1$. Ainsi la solution recherchée est $\boxed{x(t) = e^{-4t}.}$
2. (a) Les solutions de l'équation linéaire d'ordre 1 homogène associée $y'(t)+3y(t)\ =0$, sont de la forme $y(t) = Ce^{-3t}$ où C est une constante réelle.
   (b) Une solution particulière de l'équation avec second membre $y'(t) + 3y(t)\ =4e^{-4t}$, est $y(t) = -4e^{-4t}$. Cette solution peut être calculée par la méthode de la variation de la constante ou en recherchant une solution de la forme $K\mathrm{e}^{-4t}$.
   (c) La solution générale, est alors $\boxed{y(t) = Ce^{-3t} - 4e^{-4t}}$ où C est une constante réelle.
   (d) Déterminons enfin la solution y vérifiant $y(0) = 0$. On cherche C telle que : $0 = y(0) = Ce^0 - 4e^0 = C - 4$, d'où $C = 4$.
   Ainsi $\boxed{y(t) = 4e^{-3t} - 4e^{-4t}.}$

Exercice 4 *(5,5 points)*

On considère l'équation différentielle

$$z''(t) + 3z'(t) + 2z(t)\ = 24(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t}).$$

1. L'équation différentielle homogène $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$ admet pour équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a 2 racines réelles distinctes -2 et -1.
   La solution générale de $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$ est donc :
   $$z(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B\mathrm{e}^{-t}$$
   où A, B désignent deux constantes réelles.
2. Si $z(t) = \mathrm{e}^{-3t} - 4\mathrm{e}^{-4t}$ on a $z'(t) = -36\mathrm{e}^{-3t} + 16\mathrm{e}^{-4t}$ et $z''(t) = 108\mathrm{e}^{-3t} - 64\mathrm{e}^{-4t}$. D'où $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 24(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t})$, ainsi $z(t) = 12\mathrm{e}^{-3t} - 4\mathrm{e}^{-4t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t)\ = 24(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t})$.
3. La solution générale de de l'équation différentielle $z''(t)+3z'(t)+2z(t)\ = 24(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t})$ est donc $z(t) = A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-t}+12\mathrm{e}^{-3t}-4\mathrm{e}^{-4t}$ où A, B désignent deux constantes réelles.
4. Déterminons enfin la solution z vérifiant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$.
   Comme
   $$\begin{cases} 0 = z(0) = A + B + 12 - 4 \\ 0 = z'(0) = -2A - B - 36 + 16 = 0 \end{cases}$$
   alors A et B sont solutions du système linéaire $\begin{cases} A + B + 8 = 0 \\ -2A - B - 20 = 0 \end{cases}$
   d'où $A = -12$ et $B = 4$. Ainsi la solution de de l'équation différentielle $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t)\ = 24(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t})$ vérifiant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ est
   $\boxed{z(t) = -12\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{-t} + 12\mathrm{e}^{-3t} - 4\mathrm{e}^{-4t}.}$