Exercices

1 Variétés plongées

Exercice 1.1 – *Trouver un difféomorphisme de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$
- *Soient* C_0 *le cylindre* $\mathbb{S}^1\times]0,+\infty[\subset\mathbb{R}^3$ *et* C *le cylindre* $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^3$. *Trouver des difféomorphismes de* C_0 *dans* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *et de* C *dans* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
- *Soit* Δ_n *le simplexe* $\{(t_1,\dots,t_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\sum_{i=1}^n t_i=1,\, t_i\geqslant 0,\, i\in\{1,\dots,n+1\}\}$ *et* $B_n=\{(x_1,\dots,x_{n)}\in\mathbb{R}^n;0\leqslant x_1\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant 1\}$. *Trouver un difféomorphisme de* B_n *dans* Δ_n.

Exercice 1.2 *Soit* X_0 *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *réunion des trois droites* $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ *et* $\{x=y\}$. *Soient* l_1, l_2 *et* l_3 *trois droites vectorielles distinctes de* $\mathbb{R}^2$, *on pose* $X=l_1\cup l_2\cup l_3$.

Trouver un difféomorphisme de X_0 *dans* X.

Exercice 1.3 *(i) Montrer que* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$ *ne sont pas difféomorphes si* $n\neq m$.

(ii) Montrer que deux sous-variétés $M\subset\mathbb{R}^m$ *et* $N\subset\mathbb{R}^n$ *ne sont pas difféomorphes si* $dimM\neq dimN$.

Exercice 1.4 *Montrer qu'une sous-variété connexe est connexe par arcs.*

Exercice 1.5 *Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-variétés ? Si oui, donner le plus grand entier* k *pour lequel c'est une sous-variété de classe* C^k.

a) La réunion des axes de coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.
b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2+z^2=1\quad et\quad x^2+y^2-x=0\}$;
c) $\{(t,t^2)\in\mathbb{R}^2;t\geqslant 0\}\cup\{(t,-t^2)\in\mathbb{R}^2;t\leqslant 0\}$;
d) $\{(t^3,t^2)\in\mathbb{R}^2;t\in\mathbb{R}\}$;
e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;y=|x|\}$;
f) Le cône double $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2=z^2\}$.

Exercice 1.6 *Montrer que* $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0<x<1,\, y=\sin(\frac{1}{x})\}$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^2$ *de dimension 1, qu'en est-il de son adhérence ?*

Exercice 1.7 *1) Montrer que* $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$ *et* $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0\}$ *sont des sous-variétés de* $\mathbb{R}^3$ *de classe* C^∞.

2) Montrer que l'inclusion canonique $j : H_2 \to \mathbb{R}^3$ *est de rang* 2.

Exercice 1.8 *Soit* $M^m \in \mathbb{R}^l$ *et* $N^n \in \mathbb{R}^k$ *deux sous-variétés.*

Montrer que $M \times N$ *est une sous-variétés de* $\mathbb{R}^{l+k}$ *de dimension* $m + n$ *et que* $T_{(x,y)}M \times N = T_xM \times T_yN$.

En déduire que le tore $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \ldots \mathbb{S}^1$ *(n fois) est une sous-variété de* $\mathbb{R}^{2n}$

Exercice 1.9 *Soit* V *un sous-espace vectoriel de dimension* p *de* $\mathbb{R}^n$. *Montrer que* V *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *difféomorphe à* $\mathbb{R}^p$.

Pour tout $v \in V$, *donner un isomorphisme "naturel" entre* V *et* T_vV.

Exercice 1.10

1. *Soient* $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ *des sous-variétés et* $i : X \to Y$ *l'inclusion canonique, montrer que* $T_xi : T_xX \to T_xY$ *est aussi l'inclusion.*
2. *Soient* $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ *des sous-variétés. On suppose que* $\dim X = \dim Y$. *Montrer que* X *est un ouvert de* Y.
3. *Montrer que* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *n'est pas difféomorphe à une sous-variété de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.11 *Un groupe de Lie est une variété* G *qui est aussi un groupe, telle que les opérations*

de multiplication $\begin{cases} m : G \times G & \to G \\ \quad (g_1, g_2) & \mapsto g_1 g_2 \end{cases}$ *et d'inversion* $\begin{cases} i : G & \to G \\ \quad g & \mapsto g^{-1} \end{cases}$ *sont des application de classe* C^k *pour un certain* $k \geqslant 1$.

1) Soit e l'élément neutre de G. *Montrer que l'application tangente* $T_em : T_eG \times T_eG \to T_eG$ *est l'addition* $T_e(v, w) = v + w$, *et que l'application tangent* $T_ei : T_eG \to T_eG$ *est la multiplication par* -1, $T_ei(v) = -v$.

2) Dans un groupe de Lie G, *tout élément* g *détermine une multiplication à gauche* $\gamma_g : G \to G$, $\gamma_g(g') = gg'$ *et une multiplication à droite* $\delta_g : G \to G$, $\delta_g(g') = g'g$.
Utiliser ces applications et leurs applications tangentes pour déterminer les applications tangents de m *et* i *en tout* $g \in G$.

Exercice 1.12 *Soit d un entier positif. La variété de Brieskorn V_d^{2n-1} est l'ensemble des points $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que*

$$z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0 \quad et \quad z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_n\bar{z}_n = 1.$$

Montrer que V_d^{2n-1} est une variété différentielle classe C^∞ et de dimension (réelle) $2n-1$.

Exercice 1.13 *Soient $w_1, \cdots, w_n$ et d des entiers > 0.*

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite quasihomogène de type $(w_1, \cdots, w_n; d)$ si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \cdots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, \cdots, x_n).$$

a) Montrer que si f est de classe C^1 et quasihomogène de type $(w_1, \cdots, w_n; d)$ alors pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$d.f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n).$$

b) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, $V_y = f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

c) On suppose que f a une singularité isolée en 0. Montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$, pour tout $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $W_\epsilon = f^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{S}_\epsilon{}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-2$.
En déduire que pour $d \equiv 1[2]$, $V_d = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0^d + x_1^{2a_1} + \ldots + x_n^{2a_n} = 0 \quad et \quad x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $n-1$.

Exercice 1.14 .

a) Montrer que l'ensemble $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$.

b) Montrer que l'ensemble $M_{n\times p}^r = \{M \in M_{n\times p}(\mathbb{R}); rang(M) = r\}$ des matrices de rang r est une sous-variété de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
(Indication : Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n\times p}$ avec $A \in M_{r\times r}^r$. montrer que $M \in M_{n\times p}^r$ si et seulement si $D - C.A^{-1}.B = 0$.)

Exercice 1.15 *Soient V et V' deux variétés différentiables de classe C^k, $k \geqslant 1$, de même dimension n, et soit f une application de classe C^k de V dans V'.*

Un point $y \in V'$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou si $\forall x \in f^{-1}(y)$, f est une submersion en x.

On suppose V compacte.

1) Montrer que quelque soit $y \in V'$ valeur régulière de f, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini.

2) Montrer que $\forall y \in V'$, valeur régulière de f, il existe un voisinage ouvert W_y de y tel que pour tout $y' \in W_y$, y' est une valeur régulière et

$$Card\{f^{-1}(y')\} = Card\{f^{-1}(y)\}$$

3) En déduire que si l'ensemble des valeurs régulières de f est connexe, $Card\{f^{-1}(y)\}$ est constant.

Exercice 1.16 *Soit* $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$,

où les a_k *sont des constantes complexes,* $a_n \neq 0$ *et* $n \geqslant 1$, $z \in \mathbb{C}$.

P *détermine une application analytique de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$*, donc une application analytique de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*, en particulier de classe* C^k*, notée* h.

Soit $\mathbb{S}^2$ *la sphère unité, sous-variété de* $\mathbb{R}^3$*. On désigne par* ϕ_N *et* ϕ_S *les projections stéréographiques de pôle Nord et Sud respectivement.*

1) Montrer que l'application $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \phi_N^{-1} \circ h \circ \phi_N(x) & \textit{pour} \quad x \neq N \\ N & \textit{pour} \quad x = N \end{cases}$$

est une application de classe C^k*, (même analytique.)*
(pour démontrer l'assertion au voisinage de N*, on considérera l'application* $Q(z) = \phi_S \circ f \circ \phi_S^{-1}(z)$ *de* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$*.)*

2) Montrer que tous les points de $\mathbb{S}^2$ *sauf un nombre fini sont des valeurs régulières de* f *(on démontrera d'abord l'assertion analogue pour l'application* h*.)*

3) Montrer que $\mathbb{S}^2$ *moins un nombre fini de points est connexe par arcs.*

4) En déduire que $f^{-1}(y)$ *est non vide pour tout* $y \in \mathbb{S}^2$*. (on pourra appliquer le 3) de l'exercice précédent).*

5) En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $P(z) = 0$
("Théorème de d'Alembert").

Exercice 1.17 *Montrer que l'ensemble* $A = \{(x, |x|);\, x \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas l'image de* $\mathbb{R}$ *par une immersion.*

Donner un exemple d'une application de classe C^1 *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *dont l'image est* A.

Exercice 1.18 *Soit* f *une application injective de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$.

Montrer que $n \leqslant m$ *et que* $d_x f$ *est injective sur un ouvert dense.*

$d_x f$ *est-elle nécessairement injective partout ?*

Exercice 1.19 *Montrer qu'il n'existe pas d'immersion de* $\mathbb{S}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.20 *Soit* $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6$ *donnée par* $\phi(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy)$.

a) Soit $\mathbb{S}^2/\sim$ *l'espace quotient de* $\mathbb{S}^2$ *par la relation d'équivalence* $(x, y, z) \sim -(x, y, z)$ *(antipodie)*

Montrer que f passe au quotient en une application continue et injective $\tilde{f} : \mathbb{S}^2/\sim \to \mathbb{R}^6$

b) En déduire que l'image de $\mathbb{S}^2$, $f(\mathbb{S}^2)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$ de dimension 2.

Exercice 1.21 *Soient $M \subset \mathbb{R}^N$ une sous-variété connexe et $f : M \to M$ une application de classe C^1, telle que $f \circ f = f$. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété connexe et fermée de M. Quelle est sa dimension ?*

Exercice 1.22 *1) Soient $f : M^m \to N^n$ et $g : N^n \to P^p$ des applications de classe C^1, soit $V \subset P$ une sous-variété telle que $g \pitchfork V$.*
Montrer que $f \pitchfork g^{-1}(V)$ si et seulement si $g \circ f \pitchfork V$.

b) (produit fibré de variétés)Soient $f : M^m \to P^p$ et $g : N^n \to P^p$ des applications de classes C^1, telles que l'application $(f, g) : M \times N \to P \times P$ soit transverse à la diagonale de $P \times P$. Montrer que l'ensemble défini par $M \times_P N = \{(x, y) \in M \times N;\, f(x) = g(y)\}$ est une sous-variétés et déterminer sa dimension.

Exercice 1.23 *(Théorème de Sard)*

a) Trouver une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des valeurs critiques est dense.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'application de classe C^1 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(x)$ soit non dénombrable.

c) Soient $f : X \to Y$ une application de classe C^∞, bijective et de rang maximum (on ne fait pas d'hypothèse sur les dimensions des variétés). Montrer que f est un difféomorphisme.

d) Soient $f : X^n \to Y^n$ une application de classe C^1. Si X est compacte et Y n'est pas compacte, alors f a nécessairement un point critique.

Exercice 1.24 *(Lemme de Morse)*

Soit f une application de classe C^3 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 0$.

On suppose que $d_0 f = 0$ et que $d_0^2 f$ (qui est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$) est non-dégénérée, de signature (p, q).

le but de cet exercice est de montrer que, après un changement de coordonnées, f s'écrit $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$.

1) Montrer l'existence de fonctions h_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de classe C^1 telles que $f(x) = \sum_{i,j}^{n} x_i x_j h_{ij}(x)$. Autrement dit, en notant $A(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $f(x) = < A(x)x, x >$ et $A(0) = d_0^2 f$.

2) Soient $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées dse vtaille n et $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques de taille n. Soit $Q \in S_n(\mathbb{R})$ non dégénérée. En considérant l'application L de $M_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$ définie par $L(A) = {}^tAQA$, montrer l'existence d'une fonction φ de classe C^∞ définie dans un voisinage U de Q dans $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in U$, ${}^t\varphi(x)Q\varphi(x) = x$. dans

3) Conclure.

4) Montrer que l'application de $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto z$ est une fonction de Morse.

5) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3. On considère pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ l'application $g_a(x) = g(x)+ < x, a >$.
($< ., . >$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$)
Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{R}^n; g_a$ est une fonction de Morse$\}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.