

**Contrôle continu**

Lundi 15 Mai 2006

Durée 3h

**Exercice 1** (3pts) On considère sur  $\mathbb{R}^2$ , les champs de vecteurs  $X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}$  et  $Y = y \frac{\partial}{\partial y}$  et la 1-forme différentielle  $\omega = (x^2 + 2y)dx + (x + y^2)dy$ .

Vérifier la relation :

$$d\omega(X, Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

**Exercice 2** (3pts) On considère l'application  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  définie par :

$$\phi_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i+j=k+1} x_i x_j \quad \text{si } 1 \leq k \leq 2n$$

$$\text{et } \phi_{2n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

- Quel est le plus grand ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur lequel  $\phi$  est une immersion ?
- Construire, à partir de  $\phi$ , un plongement de  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Exercice 3** (4 pts) Soient  $V$  une variété connexe de dimension  $n$ ,  $W \subset V$  une sous-variété fermée de dimension  $p$ .

- On suppose  $p < n$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $V - W$ . Montrer que la frontière de  $C$  dans  $V$  est une réunion de composantes connexes de  $W$ .  
( la frontière de  $C$  est l'ensemble  $\overline{C} - C$ )
- On suppose  $p = n - 1$ . Montrer que si  $W$  est connexe,  $V - W$  a au plus deux composantes connexes. En déduire que si  $W$  a  $k$  composantes connexes, alors  $V - W$  a au plus  $(k + 1)$  composantes connexes.
- On suppose  $p \leq n - 2$ . Montrer que  $V - W$  est connexe.

**Exercice 4** (4pts) Soit  $A$  une sous-variété compacte à bord de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ).

Soit  $V$  un ouvert voisinage de  $A$ .

On note par  $j$  l'injection canonique de  $\partial A$  dans  $V$  i.e.  $j(x) = x$  pour tout  $x \in \partial A$ .

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de rétraction  $C^1$  de  $V$  sur  $\partial A$  i.e. une application  $C^1$ ,  $f : V \rightarrow \partial A$ , telle que  $f \circ j = Id_{\partial A}$ .

- 1) Soit  $f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $C^\infty$ , telle que  $f(V) = \partial A$  et  $f(x) = x$  pour tout  $x \in \partial A$ .  
 On munit  $A$  de l'orientation induite de celle de  $\mathbb{R}^n$ .  
 Comparer les images réciproques par l'inclusion  $j$  des formes  $\alpha = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  et  $\omega = f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_n$ . En déduire, par application de la formule de Stokes, que l'on a

$$\int_A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_A df_1 \wedge \dots \wedge df_n \quad (*)$$

- 2) Montrer que la forme différentielle  $df_1 \wedge \dots \wedge df_n$  sur  $V$  est nulle.  
 En déduire de (\*) une contradiction.

**Exercice 5** (6pts)

Soit  $V$  une variété différentielle de classe  $C^r$  ( $r \geq 3$ ). soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $V$  et  $\varphi$  son flot local.

- a) Soit  $s$  un nombre réel.  
 Montrer que  $(t, x) \mapsto \varphi_{ts}(x)$  est un groupe local de difféomorphisme de  $V$ .  
 Quel est le champ de vecteurs associé?
- b) On rappelle que si deux groupes locaux à 1-paramètre de difféomorphismes déterminent le même champ de vecteurs, ils coïncident.  
 Soit  $f : V \rightarrow W$  une applications entre variétés différentielles. Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs sur  $V$  et  $W$  respectivement et désignons par  $\varphi$  et  $\psi$  leur flot respectif. Supposons que  $Y$  soit  $f$ -adapté à  $X$  c'est à dire que pour tout  $x \in X$ ,  $T_x f(X(x)) = Y(f(x))$ .  
 Montrer que  $f \circ \varphi_t = \psi_t \circ f$  pour tout  $t$  tel que les deux membres aient un sens.
- i) On considère la projection  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $p(x, y) = x$  et  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 Sous quelle condition sur  $X$ , existe-t-il un champ de vecteurs  $Y$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $p$ -adapté à  $X$ ?
- ii) Soit  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$  munit de la structure induite de  $\mathbb{R}^2$ .  
 Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  la restriction à  $M$  de la projection  $p$ .  
 Soit  $X(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ . Montrer qu'il n'existe pas de champ de vecteurs  $Y$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$ -adapté à  $X$ .
- c) On suppose que  $f$  est un difféomorphisme.  
 Montrer que le champ de vecteurs  $f_* X$  a pour flot  $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ .
- d) On suppose que  $f : V \rightarrow V$  est un difféomorphisme.  
 Montrer que  $f_* X = X$  si et seulement si  $f \circ \varphi_t = \varphi_t \circ f$  pour tout  $t$  où  $\varphi_t$  est défini.
- e) Soient  $X$  et  $Y$  des champ de vecteurs sur  $V$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  leurs flots respectifs.  
 On suppose que  $[X, Y] = 0$ . Montrer que  $\Psi_t = \varphi_t \circ \psi_t$  est un groupe local à un paramètre.  
 Quel est le champ de vecteurs associé au groupe à 1-paramètre  $\Psi_t$ ?