Corrigé du contrôle continu
Lundi 15 Mai 2006

Exercice 1

On a $[X,Y]=0$ et

$$d\omega = d(x^2+2y)\wedge dx + d(x+y^2)\wedge dy = -dx\wedge dy.$$

$\omega(X) = (x^3+2xy)+(2x^2y+2xy^3) = x^3+2xy+2x^2y+2xy^3$ d'où
$L_Y\omega(X) = y(2x+2x^2+6xy^2) = 2xy+2x^2y+6xy^3$
$\omega(Y) = (xy+y^3)$ d'où
$L_X\omega(Y) = xy+2xy(x+3y^2) = xy+2x^2y+6xy^3$
et enfin $d\omega(X,Y) = -(dx\wedge dy)(x\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}) = -xy$.

Exercice 2 On a $\frac{\partial\phi_{2n+1}}{\partial x_i} = 2x_i$ si et $\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i} = 2x_i$ si $i=\frac{k+1}{2}$ sinon $\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i} = x_{k+1-i}$ pour $k-n\leqslant i\leqslant \min\{k,n+1\}$.

On vérifie que ϕ est de rang $n+1$ sur $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$. Par exemple si $x_1\neq 0$, alors le premier mineur $(n+1)\times(n+1)$ de $D\phi$ est égal à $2(x_1)^{n+1}\neq 0$. Si $x_1=0$ et $x_2\neq 0$, alors la première ligne est nulle, le mineur $(n+1)\times(n+1)$ à partir de la deuxième ligne d est égal à $2(x_2)^{n+1}\neq 0$, etc...

Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\tilde{\phi}$ la restriction de ϕ à $\mathbb{S}^n$. On considère l'application $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^{2n}$ définie par $f_k=\tilde{\phi}_k$ pour $1\leqslant k\leqslant 2n$.

Sur $\mathbb{S}^n$, $\phi_{2n+1}=1$. Donc le rang f =rang $\tilde{\phi}=n$. soit π la projection naturelle de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. On vérifie que $f(x)=f(x')$ si et seulement si $x=\pm x'$.

Donc f passe au quotient en une application $\tilde{f}:\mathbb{P}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{2n}$. $\tilde{f}$ est injective par construction, est une immersion car $f=\tilde{f}\circ\pi$ et π est un difféomorphisme local. Comme $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est compact, $\tilde{f}$ est aussi propre, donc un plongement.

Exercice 3

1) Comme $V-W$ est ouvert dans V, c'est une sous-variété, donc C est ouvert dans $V-W$ et donc dans V. Si $\bar{C}-C$ était vide, C serait ouvert et fermé dans V (cas $W=V$ ou $W=\emptyset$). Ces cas exclus, la frontière de C est égale à celle de $V-C$ donc ne rencontre pas $V-(W\cup C)$ qui est dans l'intérieur de $V-C$. Donc $\bar{C}-C\subset W$.

Soit $x\in\bar{C}-C$ et on choisit une carte (U_x,φ) de W en x telle que $\varphi(x)=0$, $\varphi(U_x)=B^n$ et $\varphi(U_x\cap W)=B^n\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\}^{n-p})$, où B^n est la boule unité. Alors $\varphi(U_x\cap C)$ est un ouvert fermé de $B^n-\mathbb{R}^p\times\{0\}^{n-p}$, non vide puisque $0=\varphi(x)$ lui est adhérent. Deux cas sont à distinguer :

a) $p=n-1$: $B^n-\mathbb{R}^p\times\{0\}^{n-p}$ a deux composantes connexes B^n_+ et B^n_-, dont l'une au moins est contenue dans $\varphi(U_x\cap C)$, et $B^n\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\}^{n-p})$ est adhérent à chacune.

b) $p < n-1$: $B^n - (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})$ est connexe, $\varphi(U_x \cap C) = B^n \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})$ et $B^n \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})$ est encore adhérent à $B^n - (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})$.

On voit donc dans les deux cas que $\varphi^{-1}(B^n \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})) = U_x \cap W \subset \bar{C} \cap U_x$ et donc $\bar{C} - C$ est un ouvert dans W. Comme il est évidemment fermé, donc $\bar{C} - C$ est une composante connexe de W.

2) Si C est une composante connexe de $V - W$ et si W est connexe, on a $\bar{C} - C = W$ d'après 1). Soit $x \in W = \bar{C} - C$, et prenons une carte comme dans 1). Chaque composante de $V - W$ doit contenir $\varphi^{-1}(B^n_-)$ et $\varphi^{-1}(B^n_+)$, il y en a donc au plus deux, puisqu'elles sont disjointes.

Si W a k-composantes connexes $W_1, \ldots, W_k$, on procède par récurrence sur k :

$V - (W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1})$ a s-composantes connexes $C_1, \ldots, C_s$ avec $s \leqslant k$. Comme W_k est connexe il est contenu dans l'un des C_i, soit C_1. On a donc :

$$V - W = (C_1 - W_k) \cup C_2 \cup \ldots \cup C_s$$

comme $C_1 - W_k$ a au plus 2 composantes connexes, $V - W$ a donc au plus $(s+1)$ composantes connexes, avec $s + 1 \leqslant k + 1$.

3) Soit C une composante de $V - W$ et $x \in \bar{C} - C$. Reprenant les notations de 1), on voit que $\varphi(U_x \cap \bar{C}) = B^n$, et donc que x est intérieur à $\bar{C}$. Ceci montre que $\bar{C}$ est ouvert et fermé dans V, donc que $\bar{C} = V$. Comme $\bar{C} \subset C \cup W \subset V$, on a égalité, d'ou $V - W = C$.

Exercice 4

1) Par hypothèse, on a pour tout i, $f_i \circ j = x_i \circ j$, autrement dit $j^*(f_i) = j^*(x_i)$. Or

$$j^*(x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n) = j^*(x_1) dj^*(x_2) \wedge \ldots \wedge dj^*(x_n)$$

$$j^*(f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n) = j^*(f_1) dj^*(f_2) \wedge \ldots \wedge dj^*(f_n)$$

donc

$$j^*(x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n) = j^*(f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n)$$

Le théorème de Stokes appliqué à la forme induite par $x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ sur A donne

$$\int_A dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\partial A} j^*(x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n)$$

De même, le théorème de Stokes appliqué à la forme induite par $f_1 df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ sur A donne

$$\int_A df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = \int_{\partial A} j^*(f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n)$$

La formule $(*)$ en résulte.

2) Soit $x \in V$. Comme f est à valeur dans ∂A, qui est une sous-variété de dimension $n-1$, le rang de f est $< n$. Les formes linéaires $df_1(x), \dots, df_n(x)$, lignes de la matrice jacobienne de f, sont donc linéairement dépendantes, donc $df_1(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) = 0$: la n-forme $df_1 \wedge \dots \wedge df_n$ sur V est donc identiquement nulle.
D'autre part, comme A est munie de l'orientation induite par celle de $\mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ est le volume euclidien de A, donc un nombre positif non nul, ce qui contredit $(*)$.

Exercice 5 Soit V une variété différentielle de classe C^r ($r \geqslant 3$). soit X un champs de vecteurs sur V et φ son flot local.

a) Soit s un nombre réel.
Il est clair que $(t,x) \mapsto \varphi_{ts}(x)$ est un groupe local de difféomorphisme de V. D'autre part $t \mapsto \varphi_{st}$ est la composée de la multiplication par s et de $u \mapsto \varphi_u$. Par suite $\left(\frac{d\varphi_{st}(x)}{dt}\right)_{t=0} = sX(x)$. Le champ de vecteurs associé est donc sX.

b) Posons $\alpha(t) = (f \circ \varphi_t)(x)$ et $\beta(t) = (\psi_t \circ f)(x)$. α et β prennent en $t = 0$, la valeur $f(x)$. Il suffit donc de montrer que α et β satisfont toutes les deux l'équation $\frac{d\gamma(t)}{dt} = Y(\gamma(t))$.
Il vient

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = T_{\varphi_t(x)} f \circ \frac{d}{dt}(\varphi_t(x))(t) = T_{\varphi_t(x)} f \circ X(\varphi_t(x)) = Y_{f \circ \varphi_t(x)} = Y_{\alpha(t)}$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = Y(\psi_t \circ f(x)) = Y_{\beta(t)}$$

i) Soit $X(x,y) = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$.
Pour que X soit p-adapté à un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}$, il faudrait que pour tout couple (x_0, y_0), (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, i.e. $x_0 = x_1 = x$ on doit avoir
$D_{(x,y_0)}p(X(x,y_0)) = D_{(x,y_1)}p(X(x,y_1))$ ce qui nous donne comme condition $a(x,y_0) = a(x,y_1)$ pour tout x, y_0, y_1 dans $\mathbb{R}$.

ii) De même la condition sur X est que

$$D_{(x,y_0)}f(X(x,y_0)) = D_{(x,y_1)}f(X(x,y_1))$$

comme $D_{(x,y_0)}f(X(x,y_0)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y_0^2}}$ et $D_{(x,y_1)}f(X(x,y_1)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}$,
cette condition n'est pas satisfaite si $y_0 \neq y_1$,
il n'existe pas de champ de vecteurs $\mathbb{R}$ f-adapté à X.

c) Comme f est un difféomorphisme, le champ de vecteurs f_*X est f- adapté à X, donc son flot ψ est caractérisé par le fait que $\psi_t \circ f = f \circ \varphi_t$, Il est donc égale à $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$.

d) La restriction d'un groupe local à 1-paramètre φ de difféomorphisme à un voisinage plus petit de $\{0\} \times V$ détermine le même champ de vecteurs que φ. On déduit donc d).

e) Soient X et Y des champ de vecteurs sur V, φ et ψ leurs flots respectifs. Comme $[X, Y] = 0$ est équivalent à $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ pour tout s et t voisin de 0, on obtient que $\Psi_t \circ \Psi_s = \varphi_t \circ \psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_s = \varphi_t \circ \varphi_s \circ \psi_t \circ \psi_s = \varphi_{t+s} \circ \psi_{t+s} = \Psi_{t+s}$ pour t et s proche de 0. De plus $\Psi_0 = \varphi_0 \circ \psi_0 = Id_V$.
Donc Ψ_t est un groupe local à 1-paramètre de difféomorphismes de V.
D'autre part $\frac{d}{dt}(\psi_t(x))_{t=0} = X(\Psi_t(x)) + T_{\psi_t(x)}\varphi_t(Y(\psi_t(x))) = X(\Psi_t(x)) + (\varphi_t)_* Y(\Psi_t(x))$.
Comme $[X, Y] = 0$ est aussi équivalent à $(\varphi_t)_* Y = Y$, on obtient donc que le champs de vecteur associé à Ψ_t est $X + Y$.