

Corrigé du contrôle continu n°2

vendredi 31 Mars 2006

Exercice 1

- 1) Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k entre deux variétés de classe C^k $k \geq 1$. Donner la définition de l'application tangente $T_{x_0}f$ en un point $x_0 \in M$.
- 2) Soit $g : N \rightarrow P$ une autre application de classe C^k .
Montrer que pour tout $x_0 \in M$, $T_{x_0}(g \circ f) = T_{f(x_0)}g \circ T_{x_0}f$.

Exercice 2 Pour $r > 0$, ϕ_r est un homéomorphisme, d'où \mathcal{A}_r définit sur \mathbb{R} une structure différentielle.

D'autre part, pour $r \neq s$, $\phi_s \circ \phi_r^{-1}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{s}{r}t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ n'est pas différentiable, donc les atlas \mathcal{A}_r et \mathcal{A}_s

ne sont pas compatibles, c'est à dire ils définissent des structures différentielles différentes sur \mathbb{R} . Donc, la famille d'atlas

$\{\mathcal{A}_r\}_{r>0}$ définit sur \mathbb{R} une infinité non dénombrable de structures différentielles sur \mathbb{R} .

Mais, ces structures sont difféomorphes à la structure standard sur \mathbb{R} (celle induite par \mathcal{A}_1).

En effet, l'application $\phi_r : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_r) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ est un difféomorphisme, car, $\phi_1 \circ \phi_r \circ \phi_r^{-1} = \phi_1 = Id_{\mathbb{R}}$

Exercice 3 Si g est de classe C^k alors $g \circ f$ l'est comme composée d'applications de classe C^k .

Réciproquement, si $g \circ f$ est de classe C^k , soit y_0 un point de N , comme f est surjective il existe $x_0 \in M$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est une submersion, le théorème du rang, nous donne une carte (U, ϕ) de M en x_0 et une carte (V, ψ) en y_0 telle que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

Soit (W, Ψ) une carte de P en $g(y_0)$ telle que $g(V) \subset W$, alors $\Psi \circ g \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (\Psi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (\Psi \circ g \circ \psi^{-1})(x_1, \dots, x_n)$, comme $g \circ f$ de classe C^k , l'application lue dans les cartes (U, ϕ) et (V, ψ) est de classe C^k , ce qui entraîne à son tour que l'application l'application g lue dans les cartes (V, ψ) et (W, Ψ) est de classe C^k , d'où g est de classe C^k .

L'énoncé analogue pour les immersions est le suivant : soit $f : M \rightarrow N$ est une immersion de classe C^k , et $g : P \rightarrow M$ une application continue.

Alors g est de classe C^k si et seulement si $f \circ g$ est de classe C^k .

En effet, si $z_0 \in P$, comme f est une immersion en $x_0 = g(z_0)$, elle est équivalente au voisinage de x_0 à l'application $(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

Comme, h est continu si z est au voisinage de z_0 , $h(z)$ est au voisinage de x_0 et donc $f \circ h(z) = (h_1(z), \dots, h_m(z), 0, \dots, 0)$,

d'où si $f \circ h$ est de classe C^k , alors les composantes de h sont de classes C^k , ce qui montre que h est de classe C^k .

Exercice 4

- a) Soit S_n l'ensemble des matrices symétriques, c'est une variété de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ difféomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

L'application $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n$ définie par $F(M) = {}^tMM$ est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, et sa différentielle en M est donnée par :

$D_M F(H) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(M+tH) - F(M)}{t} = {}^tMH + {}^tHM$ pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in O_n$, $D_M F$ est surjective : en effet, soit B une matrice symétrique ; alors si $H = \frac{1}{2}MB$ on aura

$D_M F(H) = \frac{1}{2}{}^tMMB + \frac{1}{2}{}^tB{}^tMM = B$. Donc $O_n = F^{-1}(I)$ est sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ soit $\frac{n(n-1)}{2}$.

- b) $O_n = F^{-1}(I)$, alors $T_M O_n = Ker(D_M F)$, en particulier si $M = I$, $T_I O_n = Ker(D_I F) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); {}^t M + M = 0\}$.
- c) De même $T_M O_n = Ker(D_M F)$, il suffit donc vérifier que $D_M F(MA) = 0$; en effet, $D_M F(MA) = {}^t M(MA) + {}^t(MA)M = ({}^t M M)A + {}^t A({}^t M M) = A + {}^t A = 0$.
- d) Comme O_n est une variété plongée, son fibré tangent $T O_n = \{(M, H) \in O_n \times T_M O_n\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$. Alors, l'application H et sont inverse $H^{-1} : T O_n \rightarrow O_n \times T_I O_n$ telle que $H^{-1}(M, H) = (M, {}^t M H)$ sont différentiables d'où, H est un difféomorphisme. La restriction de H à $\{M\} \times T_M O_n$ est un isomorphisme linéaire sur $\{M\} \times T_I O_n$ (d'après c)) et le diagramme $O_n \times T_M O_n \xrightarrow{H} T O_n$ est commutatif, d'où le fibré tangent $p : T O_n \rightarrow O_n$ est

$$\begin{array}{ccc} O_n \times T_M O_n & \xrightarrow{H} & T O_n \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow p \\ & & O_n \end{array}$$

isomorphe au fibré trivial $\pi_1 : O_n \times T_M O_n \rightarrow O_n$, i.e. O_n est parallélisable.

Exercice 5

- a) On vérifie facilement que tous n et m entiers, $\Theta_n \circ \Theta_m = \Theta_{n+m}$ et $\Theta_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$.
Pour montrer que l'action est différentiable, (comme \mathbb{Z} est discret), il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Theta_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + n, (-1)^n y)$ est différentiable, ce qui est clair (c'est une application affine)
On va maintenant montrer que l'action est proprement discontinue et sans points fixes :
- i) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors la bande $U_{(x_0, y_0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| < \frac{1}{2}\}$ est voisinage ouvert de (x_0, y_0) qui ne rencontre pas ses images par les $\Theta_n : (x, y) \mapsto (x + n, (-1)^n y)$, ($n \neq 0$).
En effet, $(x, y) \in \Theta_n(U_{(x_0, y_0)}) \cap U_{(x_0, y_0)}$ entraîne que $(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$
- ii) Si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) ne sont pas dans la même orbite i.e. $\forall n \in \mathbb{Z} (x_1, y_1) \neq (x_0 + n, (-1)^n y_0)$, alors $y_0 \neq \pm y_1$ ou $x_0 - x_1 \notin \mathbb{Z}$.
On définit un voisinage U_0 de (x_0, y_0) et U_1 de (x_1, y_1) de la façon suivante :
si $y_0 \neq y_1$: $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y - y_0| < \frac{|y_0 - y_1|}{2}\}$ et $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y - y_1| < \frac{|y_0 - y_1|}{2}\}$.
si $x_0 - x_1 \notin \mathbb{Z}$: Soit $c = \inf\{c_0, c_1\} \in]0, 1[$ où $x_0 - x_1 \equiv c_0 \pmod{\mathbb{Z}}$ et $x_1 - x_0 \equiv c_1 \pmod{\mathbb{Z}}$. On pose :
 $\overline{U_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| < \frac{c}{2}\}$ et $\overline{U_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_1| < \frac{c}{2}\}$.
Alors, pour tous entiers n et m on a $\Theta_n(\overline{U_0}) \cap \Theta_m(\overline{U_1}) = \emptyset$.
Donc $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est une variété différentielle de classe C^∞ et de dimension 2. La variété M n'est pas compacte, car la suite $\{[(0, k)]\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ n'a pas de point d'accumulation.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_1(\Theta_n(x, y)) = \pi_1(x + n, (-1)^n y) = (x + n, 0) = \Theta_n(x, 0)$. alors, cette application passe au quotient en une application $\pi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}/\mathbb{Z}$. De plus, les applications quotients sont des difféomorphismes locaux, d'où π est de classe C^∞ , comme composée d' applications de classes C^∞ .
Donc, $\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\pi[(x, y)] = [(x, 0)]$ est de classe C^∞ .
A partir de l'atlas $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ on obtient un atlas sur \mathbb{S}^1 défini par $\mathcal{A}' = \{(\pi(U), \varphi_1), (\pi(V), \psi_1)\}$ tel que $\varphi_1([(x, 0)]) = (x, 0)$ et $\psi_1([(x, 0)]) = (x, 0)$ si $x > \frac{1}{2}$ et $\psi_1([(x, 0)]) = (x + 1, 0)$ si $x < \frac{1}{2}$.
Par construction, le fibré ξ est trivial au-dessus des ouverts $\pi(U) =]0, 1[/\mathbb{Z}$ et $\pi(V) = ([0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1])/\mathbb{Z}$ et de fibre $F = \mathbb{R}$.
Ainsi ξ est un fibré de rang 1 sur \mathbb{S}^1 .
- c) La section $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow E$ vérifie par définition $\pi \circ \sigma = Id_{\mathbb{S}^1}$, donc il existe une application continue $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sigma([(x, 0)]) = [(x, s(x))]$. Comme, $[(0, 0)] = [(1, 0)]$, on aura $\sigma([(0, 0)]) = \sigma([(1, 0)])$ et donc $[0, s(0)] = [1, s(1)]$ ce qui entraîne que $s(0) = -s(1)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, s doit s'annuler en au moins un point de $[0, 1]$.
Par suite, toute section continue de ξ s'annule en au moins un point, donc le fibré ξ n'est pas trivialisable.