**Corrigé du contrôle continu n$^o$1**
Mercredi 22 Février 2006

**Exercice 1**

1) Exemple $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{x^2 - y^2 + z = 0\}$ et $N = \{z = 0\}$, $M \cap N$ est la réunion des droites $z = 0, y = \pm x$ qui n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. (on remarquera qu'à l'origine $M$ et $N$ ne sont pas transverses puisque $T_0M = T_0N = \{z = 0\}$, donc $T_0M + T_0N = \{z = 0\} \neq \mathbb{R}^3$.

2) Soit $K$ un compact de $R^n$, comme $f$ est continue, pour montrer que $f^{-1}(K)$ est compact il suffit de montrer qu'il est borné. Si $f^{-1}(K)$ n'est pas borné alors il contient une suite qui tend vers $\infty$, mais comme l'image de cette suite est dans $K$ donc bornée, ceci contredit alors la condition $\lim_{|t|\to+\infty} \|f(t)\| \to +\infty$. Donc $f$ est propre et $f(\mathbb{R})$ est l'image de $\mathbb{R}$ par une immersion injective et propre c'est donc une sous-variété de dimension égale à $\dim \mathbb{R} = 1$.

3) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ , l'application définie par $f(M) = \det(M) - 1$, $f$ est polynomiale donc de classe $C^\infty$.
Si $a_1, \dots, a_n$ sont les vecteurs colonnes de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $h_1 \dots, h_n$ ceux de $H \in M_n(\mathbb{R})$ ; la multilinéarité du déterminant nous donne :
$f(A+H) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + O(\|H\|^2)$ , d'où

$$T_A f(H) = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$ alors $T_A f(A) = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) =$ $n \det A = n \neq 0$, donc le rang de $T_A f$ est supérieur ou égal à 1 qui est aussi la dimension du but $\mathbb{R}$ d'où $f$ est une submersion en tout point de $SL_n(\mathbb{R})$ et par suite $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$.

Si $A = I_n$, alors $a_i = (\delta_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}$, d'où $T_{I_n} f(H) = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) =$ $\sum_{i=1}^{n} h_{ii} = \mathrm{tr}(H)$. Comme $SL_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(0)$ on aura
$T_{I_n} SL_n(\mathbb{R}) = Ker(T_{I_n} f) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

4) L'application $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1$ à pour gradient $\mathrm{grad}\, f(x, y) = (3x^2 + y, x + 3y^2)$, les points critiques de $f$ sont $P_1 = (0, 0)$

et $P_2 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, et les valeurs critiques correspondantes sont $f(P_1) = 1$ et $f(P_2) = 1 + \frac{1}{27}$.
Donc, pour tout $y \in \mathbb{R} - \{1, 1 + \frac{1}{27}\}$, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété.
Il reste à étudier $V_1 = f^{-1}(1)$ et $V_2 = f^{-1}(1 + \frac{1}{27})$.
a) $V_1 - \{P_1\}$ est une sous-variété de dimension 1. On doit voir ce qui se passe au voisinage de $P_1$. $V_1$ a pour équation $x^3 + xy + y^3 = 0$.
Si $x$ est négligeable par rapport à $y$ alors l'équation de $V_1$ est équivalente à $xy + y^3 = 0$ et comme $y = 0$ est impossible si $x \neq 0$, donc on a un arc $x \sim -y^2$ et par symétrie, si $y$ est négligeable par rapport à $x$ on a l'arc $y \sim -x^2$.
Il n'y a rien d'autre car si $x \sim ky$, $k \neq 0$, alors $0 = x^3 + xy + y^3 \sim ky^2$ ce qui est impossible si $x \neq 0$.
Donc, $V_1$ est au voisinage de $P_1 = (0, 0)$ la réunion de 2 arcs de courbes de tangentes respectivement $x = 0$ et $y = 0$, donc ce n'est pas une sous-variété au voisinage de ce point.
b) $V_2 - \{P_2\}$ est une sous-variété de dimension 1. un raisonnement analogue au précédent, en étudions l'équation $x^3 + xy + y^3 = \frac{1}{27}$ au voisinage de $P_2$. après le changement de variables $X = x + \frac{1}{3}$ et $Y = y + \frac{1}{3}$ en se ramène à l'étude de $X^3 - X^2 + XY - Y^2 + Y^3 = 0$ au voisinage de $(0, 0)$. Comme la partie homogène de plus bas degré, $-X^2 + XY - Y^2 = -((X - \frac{Y}{2})^2 + \frac{3Y^2}{4})$ ne s'annule qu'en $(0, 0)$, il existe un voisinage de $(0, 0)$ dans lequel l'équation $X^3 - X^2 + XY - Y^2 + Y^3 = 0$ n'a pas d'autres solutions. Ceci montre que $P_2$ est un point isolé de $V_2$, donc au voisinage de ce point $V_2$ est une sous-variété de dimension 0. Par suite $V_2$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. ($V_2$ contient la droite d'équation $x + y = \frac{1}{3}$)
Finalement, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $y \in \mathbb{R} - \{1, 1 + \frac{1}{27}\}$.

**Exercice 2** **1)** a) la condition **(i)** entraîne que $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ est une submersion d'où $f^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^n - \{0\} = X - \{0\}$ est une sous-variété de dimension $n - 1$ ou vide. En générale $X$ n'est pas une sous-variété par exemple si $f(x, y) = xy$, $f$ vérifie la condition **(i)**, mais $X = f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

b) Fixons $r > 0$. Soit $x \in X \cap \mathbb{S}_r$, comme $T_x(X - \{0\})$ et $T_x\mathbb{S}_r$ sont des hyperplans de $\mathbb{R}^n$, alors $X - \{0\}$ est transverse à $\mathbb{S}_r$ en $x$ si et seulement si

$T_x(X - \{0\}) \neq T_x\mathbb{S}_r$.

Par hypothèse, $\rho$ n'a pas de point critique en $x$, donc $Ker(d_x\rho) \cap T_xX \subsetneq T_xX$ or $Ker(d_x\rho) = T_x\mathbb{S}_r$, donc $T_x\mathbb{S}_r \cap T_xX \subsetneq T_xX$ i.e. $T_x(X - \{0\}) \neq T_x\mathbb{S}_r$.

Par suite, pour tout $r > 0$, $X \cap \mathbb{S}_r$ est soit vide soit une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^n$ et $T_x(X \cap \mathbb{S}_r) = T_x(X - \{0\}) \cap T_x\mathbb{S}_r$.

Comme $\operatorname{grad} \rho(x)$ est orthogonal à $T_x\mathbb{S}_r$ et $\operatorname{grad} f(x)$ est est orthogonal à $T_x(X - \{0\})$ alors la condition **(ii)** est équivalente à pour tout $x \in X - \{0\}$ est $\operatorname{grad} f(x)$ et $\operatorname{grad} g(x)$) sont linéairement indépendants.

**2)**

a) $\operatorname{grad} f(x) = (a_1 d_1 x_1^{d_1 - 1}, \ldots, a_n d_n x_n^{d_n - 1})$, donc si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\operatorname{grad} f(x) \neq$

0. D'où la condition **(i)**. Par suite $X - \{0\} = f^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^n - \{0\})$ est une sous-variété de dimension $n-1$ ou bien vide.
D'autre part, $\mathrm{grad}\, f(x)$ et $\mathrm{grad}\, r(x)$ sont liés s'il existe un réel $\lambda$ telle que $\mathrm{grad}\, r(x) = \lambda \mathrm{grad}\, f(x)$ i.e. $\lambda a_i d_i x_i^{d_i - 1} = 2x_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, en multipliant par $x_i$, en divisant par $d_i$ et en prenant la somme sur $i$ on obtient : $\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{d_i} = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{d_i}$.
Comme $x \in X$, le terme de gauche s'annule et donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{d_i} = 0$ ce qui est impossible pour $x \neq 0$. D'où la condition **(ii)**.
Par suite, pour tout $r > 0$, $X \cap \mathbb{S}_r$ est soit vide soit une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^n$, en particulier $X \cap \mathbb{S}_1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$,
**Remarques :**
Si $x = (0, \ldots, 0)$ alors $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$ si et seulement si l'un au moins des $d_i$ est égal à 1 ce qui est équivalent à $\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1) = 0$.
Donc, si $\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1) = 0$, $X$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.
Si $\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1) \neq 0$, $X$ peut quand même être une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (ex : $x_1^3 - x_2^3 = 0$), mais ce phénomène disparaît dès que l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ :
$f^{-1}(t)$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si le nombre de Milnor $\mu = \prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ est nul.

b) Considérons l'application $\bar{\Psi} : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\bar{\Psi}(t, (x_1, \ldots, x_n)) = (t^{\frac{1}{d_1}} x_1, \ldots, t^{\frac{1}{d_n}} x_n)$.
Il est clair que $\bar{\Psi}$ est $C^\infty$ et que $\bar{\Psi}(]0, +\infty[ \times (X \cap \mathbb{S}_1)) \subset X - \{0\}$, par suite,
$\Psi = \bar{\Psi}|]0, +\infty[ \times (X \cap \mathbb{S}_1)$ de classe $C^\infty$.
Pour montrer que $\Psi$ est un difféomorphisme on va montrer que $\Psi$ est bijective et étale.
Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in X - \{0\}$, nous cherchons à résoudre le système d'équations

$$t^{\frac{1}{d_i}} x_i = y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

on nécessairement $t > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, donc $\sum_{i=1}^{n} t^{\frac{-2}{d_i}} y_i^2 = 1$.
La fonction $\theta : ]0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ définie par $\theta(t) = \sum_{i=1}^{n} t^{\frac{-2}{d_i}} y_i^2$ est une fonction strictement décroissante et surjective, donc il existe un unique $t \in ]0, +\infty[$ tel que $\theta(t) = 1$, d'où la bijectivité de $\Psi$.

Pour voir que $\Psi$ est étale , remarquons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_t(]0,+\infty[) \times T_x(X\cap\mathbb{S}_1) & \xrightarrow{T_{(t,x)}\Psi} & T_{\Psi(t,x)}(X-\{0\}) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ T_t(]0,+\infty[) \times T_x(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d_{(t,x)}\bar{\Psi}} & T_{\bar{\Psi}(t,x)}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

commute et que $\dim ]0,+\infty[\times(X\cap\mathbb{S}_1) = \dim X-\{0\} = n-1$; par suite pour montrer que $T_{(t,x)}\Psi$ est bijective il suffit de montrer que $Ker(T_{(t,x)}\Psi) = 0$, ou que $Ker(d_{(t,x)}\bar{\Psi}) \cap T_x(X\cap\mathbb{S}_r) = 0$.
Le calcul de la différentielle de $\bar{\Psi}$ nous donne que $(\nu,(\xi_1,\dots,\xi_n)) \in Ker(d_{(t,x)}\bar{\Psi})$ si et seulement si

$$\frac{x_i}{d_i}\nu + t\xi_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Par suite, si $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in T_x(X\cap\mathbb{S}_1)$, donc a fortiori dans $T_x\mathbb{S}_1$, on a $\sum_{i=1}^n x_i\xi_i = 0$, d'où $0 = \sum_{i=1}^n x_i\frac{-x_i}{td_i}\nu = -(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{td_i})\nu$ donc $\nu = 0$.
Ceci entraîne que $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$.

c) Soit $C_0(X\cap\mathbb{S}_1)$ le cône de base $X\cap\mathbb{S}_1$ et de sommet 0 c'est à dire l'espace quotient $[0,+\infty[\times(X\cap\mathbb{S}_1)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(t,x)\sim(t',x') \Longleftrightarrow (t,x) = (t',x')$ ou $t = t' = 0$.
On prolonge $\Psi$ en un homéomorphisme de $C_0(X\cap\mathbb{S}_1)$ sur $X$ de la façon suivante : on prolonge $\Psi$ en $\tilde{\Psi} : [0,+\infty[\times(X\cap\mathbb{S}_1) \to X$ par la même formule, alors $\tilde{\Psi}$ est continue, surjective et passe au quotient en une bijection continue de $C_0(X\cap\mathbb{S}_1)$ sur $X$, en effet on a $\tilde{\Psi}(t,x) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.
Il reste à montrer que $\tilde{\Psi}$ est fermée. Soit $F$ un fermé de $[0,+\infty[\times(X\cap\mathbb{S}_1)$, alors $\tilde{\Psi}(F) = \tilde{\Psi}(F\cap[0,1]\times(X\cap\mathbb{S}_1)) \cup \Psi(F\cap]0,+\infty[\times(X\cap\mathbb{S}_1))$ est fermé car $F\cap[0,1]\times(X\cap\mathbb{S}_1)$ est compact et $\tilde{\Psi}$ est continue d'une part et d'autre part $\Psi$ étant un difféomorphisme c'est une application fermée.