

Contrôle continu n°2

Vendredi 31 Mars 2006

Durée 2h

Exercice 1

- 1) Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k entre deux variétés de classe C^k , $k \geq 1$. Donner la définition de l'application tangente $T_{x_0}f$ en un point $x_0 \in M$.
- 2) Soit $g : N \rightarrow P$ une autre application de classes C^k .
Montrer que pour tout $x_0 \in M$, $T_{x_0}(g \circ f) = T_{f(x_0)}g \circ T_{x_0}f$.

Exercice 2 Pour tout nombre réel $r > 0$, on définit l'application ϕ_r de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $\phi_r(x) = x$ si $x \leq 0$ et $\phi_r(x) = rx$ si $x \geq 0$.

Montrer que pour tout $r > 0$, l'atlas $\mathcal{A}_r = \{(\mathbb{R}, \phi_r)\}$ munit \mathbb{R} , d'une structure de variété différentielle. Montrer que pour $r \neq r'$ les atlas \mathcal{A}_r et $\mathcal{A}_{r'}$ ne sont pas compatibles. Est-ce que les variétés correspondantes sont difféomorphes ?

Exercice 3 Soient M^m et N^n deux variétés de classe C^k , $k \geq 1$. Soit $f : M \rightarrow N$ une submersion surjective de classe C^k .

Soit P une variété de classe C^k et $g : N \rightarrow P$ une application.

Montrer que g est de classe C^k si et seulement si $g \circ f$ est de classe C^k .

Quel énoncé analogue on a si $f : M \rightarrow N$ est une immersion de classe C^k ?

Exercice 4 Soit $n \geq 1$ et O_n l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM(M) = I$.

- a) Montrer que O_n est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
- b) Montrer que l'espace tangent en I à O_n , $T_I O_n$ est égal à $\{M \in M_n(\mathbb{R}); {}^tM = -M\}$.
- c) Montrer que si $A \in T_I O_n$ et $M \in O_n$ alors $MA \in T_M O_n$.
- d) Soit $H : O_n \times T_I O_n \rightarrow T O_n$ l'application définie par $H(M, A) = (M, MA)$

Montrer que H est un difféomorphisme et en déduire que O_n est parallélisable.

Exercice 5

- a) Soit l'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R}^2 définie par : $\Theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\Theta(n, (x, y)) = (x + n, (-1)^n y)$.
 Montrer que l'action est différentiable, proprement discontinue et sans point fixe.
 En déduire que $E = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est une variété différentielle de dimension 2. Est-elle compacte ?
- b) On identifie E avec $([0, 1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ et \mathbb{S}^1 avec $([0, 1] \times \{0\})/\mathbb{Z}$.
 Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\pi_1(x, y) = x$.
 Montrer que π_1 passe au quotient en une application C^∞ $\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^1$, définie par $\pi[(x, y)] = [(x, 0)]$.
- c) Montrer que $\xi = (\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^1)$ est un fibré vectoriel de rang 1.
 Indication : On peut considérer l'atlas sur E , $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$, où $U =]0, 1[\times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\varphi : U \rightarrow]0, 1[\times \mathbb{R}$ définie par $\varphi([(x, y)]) = (x, y)$,
 $V = ([0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\psi : V \rightarrow]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\times \mathbb{R}$ définie par $\psi([(x, y)]) = (x, y)$ si $x > \frac{1}{2}$ et $\psi([(x, y)]) = (x + 1, -y)$ si $x < \frac{1}{2}$.
- c) Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow E$ une application continue telle que $\pi \circ \sigma = Id_{\mathbb{S}^1}$ i.e. σ est une section continue du fibré ξ . Montrer que σ s'annule en un point et en déduire que le fibré ξ n'est pas trivial. (C'est la bande de Moebius)