
Contrôle continu n°1
Mercredi 22 Février 2006
Durée 2h

Exercice 1

- 1) Donner un exemple de deux sous-variétés dont l'intersection n'est pas une sous-variété.
- 2) Soit n un entier ≥ 1 et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 injective telle que

$$f'(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \|f(t)\| \rightarrow +\infty.$$

Montrer que f est propre et en déduire que $f(\mathbb{R})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension 1.

- 3) Soit $n \geq 1$. Montrer que l'ensemble $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$.
Montrer que l'espace tangent en I_n à $SL_n(\mathbb{R})$ est égal à

$$\{M \in M_n(\mathbb{R}); \text{tr}(M) = 0\}$$

où tr est l'application linéaire trace.

- 4) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1$.
Déterminer l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f^{-1}(f(x, y))$ est une sous-variété de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 Soient n un entier ≥ 2 et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$. On va étudier $X = f^{-1}(0)$ sous-les hypothèses suivantes :

- (i) $d_x f \neq 0$ si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.
 - (ii) la restriction à $X - \{0\}$ de la fonction $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\rho(x) = \|x\|^2$, n'a pas de point critique.
($\|\cdot\|$ est la norme euclidienne habituelle de \mathbb{R}^n)
- 1) a) Montrer que $X - \{0\}$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n . Qu'en est-il en général de X ?

b) Soit \mathbb{S}_r la sphère de \mathbb{R}^n de rayon r , centrée en 0.

Montrer que, pour tout $r > 0$, $X - \{0\}$ est transverse à \mathbb{S}_r .

En déduire que pour tout $r > 0$, $X \cap \mathbb{S}_r$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

2) Soient n un entier ≥ 2 , d_1, \dots, d_n des entiers ≥ 1 et a_1, \dots, a_n des réels non nuls.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^{d_1} + \dots + a_n x_n^{d_n}.$$

a) Montrer que f satisfait aux hypothèses (i) et (ii). En déduire que $X \cap \mathbb{S}_1$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

b) Montrer que l'application $\Psi :]0, +\infty[\times (X \cap \mathbb{S}_1) \rightarrow X - \{0\}$ définie par

$$h(t, (x_1, \dots, x_n)) = (t^{\frac{1}{d_1}} x_1, \dots, t^{\frac{1}{d_n}} x_n)$$

est un difféomorphisme.

c) Soit $C_0(X \cap \mathbb{S}_1)$ le cône de base $X \cap \mathbb{S}_1$ et de sommet 0 c'est à dire l'espace quotient $[0, +\infty[\times (X \cap \mathbb{S}_1) / \sim$ où \sim est la relation d'équivalence définie par $(t, x) \sim (t', x') \iff (t, x) = (t', x')$ ou $t = t' = 0$.

Montrer que X est homéomorphe à $C_0(X \cap \mathbb{S}_1)$.

(on pourra considérer $\tilde{\Psi}$ le prolongement de Ψ à $[0, +\infty[\times (X \cap \mathbb{S}_1)$ défini par la même formule que Ψ et montrer qu'il passe au quotient en un homéomorphisme.)