1.2 Plan d'étude et exemples types.

1.2.1 But

Le but de ce chapitre est d'étudier les fonctions comme celles données dans les exemples précédents. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de courbe représentative C_f dans un repère orthonormé. On suivra le plan ci-dessous :

1. Domaine de définition D_f, domaine d'étude D
2. Domaine de dérivabilité. Sens de variation, tableau de variations
3. Limites et asymptotes, tableau de variations complété.
4. Tracé de l'allure de C_f

Avant de passer en revue les points 1, 2 et 3, nous allons commencer par appliquer ce plan d'étude à deux exemples de fonctions 'classiques'.

1.2.2 Exemple d'une fonction polynomiale

Considérons la fonction g définie par

$$g(t) = g_1(t) = \frac{1}{2}\,t^2 - 1908\,t + 1822000$$

– La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale).
  On peut éventuellement réduire son domaine de définition (voir plus tard).

1.3.1 Définition

Chercher le domaine de f c'est chercher l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ en lesquels elle est définie. On le notera D_f.

Exemple fil rouge
La fonction $f : x \mapsto \frac{x^4-x^2+4}{x^2-4}$ est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes). Elle est définie en tout point de $\mathbb{R}$ où le dénominateur de f ne s'annule pas. Son domaine de définition D_f est donc $\mathbb{R}$ privé de -2 et 2.
■

Soient les fonctions u de domaine D_u et v de domaine D_v. Alors $v \circ u$ est définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$ et son domaine de définition est l'ensemble des x réels tels que $x \in D_u$ et $u(x) \in D_v$.

Exemple 1 *$u : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, $v \circ u$ a pour domaine ...*

On peut étudier la fonction f sur un domaine réduit en utilisant des propriétés particulières de f et de C_f.

1.3.2 Fonction paire et généralisation

- Définition. La fonction f est paire si
  - le domaine de f est symétrique par rapport à 0 : pour tout x dans D_f, $-x$ est dans D_f ;
  - pour tout x dans D_f, $f(-x) = f(x)$
- Interprétation graphique (faire un dessin).
  Le graphe C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Conséquence.
  On restreint le domaine d'étude à $D = D_f \bigcap [0, +\infty[$.

  Exemple fil rouge
  La fonction $f : x \mapsto \frac{x^4-x^2+4}{x^2-4}$ est paire (justifier) donc il suffit d'étudier f sur $D = [0, 2[\cup]2, +\infty[$.
  ■
- Généralisation (faire un dessin). Le graphe C_f sera symétrique par rapport à l'axe Δ d'équation $x = x_0$ si
  - Le domaine D_f est symétrique par rapport à x_0 : pour tout x réel, si $x - x_0$ est dans D_f alors $x_0 + x$ est dans D_f ;
  - la fonction f présente une symétrie : pour tout x réel tel que $x + x_0$ est dans D_f, $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$

  Exemple 2 *fonction g, $x = 1908$*
  On restreint le domaine d'étude à $D_f \bigcap [x_0, +\infty[$.

1.3.3 Fonction impaire et généralisation

- Définition. La fonction f est impaire si
  - le domaine de f est symétrique par rapport à 0 : pour tout x dans D_f, $-x$ est dans D_f ;
  - pour tout x dans D_f, $f(-x) = -f(x)$
- Interprétation graphique (faire un dessin). Le graphe C_f est symétrique par rapport à O.
- Conséquence. On restreint le domaine d'étude à $D = D_f \bigcap [0, +\infty[$.
- Exemple La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire, on peut restreindre son étude à $[0, +\infty[$.
- Généralisation (faire un dessin). Le graphe C_f présente une symétrie par rapport à (x_0, y_0) si
  - Le domaine D_f est symétrique par rapport à x_0 : pour tout x réel, si $x - x_0$ est dans D_f alors $x_0 + x$ est dans D_f ;
  - la fonction f présente une symétrie : pour tout x réel tel que $x + x_0$ est dans D_f, $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$

1.3.4 Fonction périodique

f est périodique de période T si
– pour tout x dans D_f, $x+T$ est dans D_f ;
– pour tout x dans D_f, $f(x+T)=f(x)$
Le graphe C est invariant par les translations de vecteurs horizontaux de longueur T.

On restreint le domaine d'étude à un intervalle de longueur T.

Exemple 3 *La fonction* sin *est périodique de période* 2π*, il suffit de l'étudier sur* $[0,2\,\pi]$.

Remarque 1 *La fonction* cos *est à la fois périodique de période* 2π *et paire donc on peut réduire son domaine d'étude à* $[0,\pi]$.

1.4 Limites.

1.4.1 Première notion de limite

La fonction f a une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = +/-\infty$) si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rapprochées de l en prenant x suffisamment proche de x_0. On note $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

La fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être prises aussi grandes que l'on souhaite à condition de prendre x suffisamment proche de x_0.

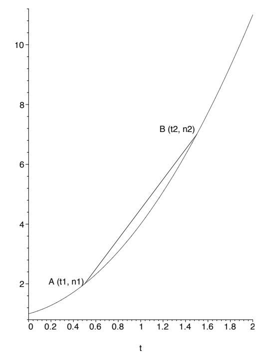
1.4.2 Propriétés

– Limites finies
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 (c'est à dire un intervalle ouvert contenant x_0 ou admettant x_0 comme extrémité) et admettant des limites finies l et m en x_0. Soit λ un réel. Alors les fonctions $f+g$, λf et fg admettent pour limites en x_0 respectivement $l+m$, λl et lm. De plus, si m est non nul, la fonction $\frac{1}{g}$ a pour limite $\frac{1}{m}$.
– Limites infinies
Supposons $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$.
Si $\lim_{x_0} g = m$ alors $f+g$ a pour limite $+\infty$ et fg $+\infty$ si $m>0$.
Si $\lim_{x_0} g = +\infty$ alors $f+g$ a pour limite $+\infty$.
$1/f$ a pour limite 0.
– Formes indéterminées.
$+\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.
– Fonction composée
Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 avec $\lim_{x\to x_0} f(x) = u_0$ et soit g définie au voisinage de u_0 telle que $\lim\limits_{u\to u_0} g(u) = l$.
Alors $g\circ f$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = l$.
– Théorème des gendarmes : soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de x_0 (c'est à dire un intervalle ouvert contenant x_0 ou admettant x_0 comme extrémité) et vérifiant sur ce voisinage $f \le g \le h$.
Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) en x_0 alors g a pour limite l en x_0.

1.5 Notion de dérivée ; sens de variation.

1.5.1 Idée intuitive

Considérons deux points A et B de coordonnées (t_1, n_1) et (t_2, n_2) sur la courbe de la fonction $h = h_3$.



Ces deux points indiquent que la population a augmenté de $n_2 - n_1$ sur une période de $t_2 - t_1$. Le taux moyen de croissance sur cette période est

$$\frac{n_2 - n_1}{t_2 - t_1}$$

L'unité de ce taux est le million de bactéries par heures.
Le taux d'accroissement à un temps donné est obtenu en plaçant le point B si près du point A que (AB) devient tangent à la courbe et la pente de cette droite est en fait le taux d'accroissement au temps t_1 (faire un dessin).
Lorsque l'intervalle devient de plus en plus petit c'est à dire lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement de la population sur ce petit intervalle devient presque égal au taux d'accroissement de la population à l'instant t. On parle alors de taux d'accroissement 'instantané' et dans le vocabulaire mathématique on introduit la notion de dérivée.

1.5.2 Définition

Définition 1 *Une fonction f est dite dérivable au point a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est appelée alors dérivée de f au point a et notée $f'(a)$.*

1.5.3 Interprétations graphique et physique.

La dérivée correspond géométriquement à la pente d'une tangente à la courbe.
Soit x_0 et soit f une fonction dérivable en x_0. La tangente au point $(x_0, f(x_0))$ de C_f a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La dérivée de f au point x_0 est la pente de cette tangente.

Physiquement, une dérivée s'interprète comme une taux instantané de croissance ou une vitesse instantanée ...

1.5.4 Sens de variation

A partir de l'étude du signe de la dérivée, on va déterminer le sens de variation de la fonction à étudier. En effet, graphiquement, "si la pente de la tangente est positive alors la fonction croît".
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dans le domaine de dérivabilité de f.
Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp ≤ 0) alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ (resp. < 0) alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

1.5.5 Dérivées de fonctions élémentaires et propriétés

Nous utiliserons le formulaire suivant donnant les dérivées des fonctions élémentaires :

$f(x)$	Domaine de définition	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0 \end{cases}$	$n\, x^{n-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Il n'est pas inutilde de rappeler les propriétés qui suivent ...
Soient u et v définies et dérivables sur D.
Alors $u + v$ et uv sont aussi dérivables sur D et pour tout x dans D,

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x),\ (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$\frac{1}{v}$ est dérivable en tout point x de D où v ne s'annule pas et

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

de même pour $\frac{u}{v}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Fonction composée : soit u une fonction dérivable en x_0 et soit v une fonction dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et

$$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0))\, u'(x_0)$$

1.6 Droites asymptotes, branches paraboliques

Soit f une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1.6.1 Les droites asymptotes

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ alors C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ alors C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ on recherche une éventuelle direction asymptotique en étudiant $\frac{f(x)}{x}$. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, et si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f

1.6.2 Les branches paraboliques

On suppose $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors l'axe (Ox) est direction asymptotique. On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction (Ox).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors l'axe (Oy) est direction asymptotique. On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction (Oy).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$ alors C_f présente une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.

Exemple fil rouge

$f : x \mapsto \frac{x^4-x^2+4}{x^2-4}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers 2^+ (resp. 2^-) donc droite asymptote verticale d'équation $x = 2$.

$f(x)/x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc branche parabolique dans la direction (Oy) ■