Université de Rennes1 **L1-Biologie** Année 2008-2009

Dérivées partielles

2.2 Fonctions de plusieurs variables.

On considère des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, par exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x\, y \end{cases}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle représente la surface d'un rectangle de largeur et longueur x et y.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle représente la distance du point de coordonnées (x, y) au point $(0, 0)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
De même

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

représente la distance du point de coordonnées (x, y, z) au point $(0, 0, 0)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

Définition 2 *Une fonction de deux variables est une règle qui assigne à chaque couple de nombres rées (x, y) d'un ensemble D un unique nombre réel noté $f(x, y)$.*

Plus généralement, on peut définir une fonction de n variables.

2.3 Dérivées partielles.

2.3.1 Fonctions partielles

A présenter plutôt avec des fonctions de deux variables et dire que l'on généralise à n variables ? ?

Soit f une fonction de trois variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^3$ et soit (x_0, y_0, z_0) un point de D.
La fonction

$$f_1 : x \to f(x, y_0, z_0)$$

est appelée fonction partielle par rapport à la première coordonnée (x) associée à f au point (x_0, y_0, z_0).
De mÍme

$$f_2 : y \to f(x_0, y, z_0)$$

est appelée fonction partielle par rapport à la deuxième coordonnée (y) associée à f au point (x_0, y_0, z_0) et

$$f_3 : z \to f(x_0, y_0, z)$$

est appelée fonction partielle par rapport à la troisième coordonnée (z) associée à f au point (x_0, y_0, z_0).

Exemple 6 *Soit la fonction f définie par $f(x,y,z) = \frac{x^2+z^2}{1+y^2}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^3$. Considérons le point $a = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.*
La fonction partielle par rapport à la première coordonnée associée à f au point a est

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$$

De même on définit les fonctions partielles par rapport à la deuxième coordonnée

$$f_2 : y \mapsto \frac{2}{1+y^2}$$

et par rapport à la troisième coordonnée

$$f_3 : z \mapsto \frac{1+z^2}{2}$$

2.3.2 Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^3$ et soit (x_0, y_0, z_0) un point de D. La fonction f_1 définie précédemment est une fonction d'une seule variable. Si elle est dérivable, sa dérivée au point x_0 s'appelle la dérivée partielle première de f par rapport à x au point (x_0, y_0, z_0) et se note '$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$' :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_1'(x_0)$$

De même on définit les dérivées premières partielles par rapport à y et à z au point (x_0, y_0, z_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = f_2'(y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = f_3'(z_0)$$

Exemple 7 *(suite) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = x$ donc la dérivée partielle de f par rapport à x au point $(1,1,1)$ est*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = f_1'(1) = 1$$

De même la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, f_2'(y) = \frac{-4y}{(1+y^2)^2}$ donc la dérivée partielle de f par rapport à x au point $(1,1,1)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = f_2'(1) = -1$$

Enfin la fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, f_3'(z) = z$ donc la dérivée partielle de f par rapport à z au point $(1,1,1)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = f_3'(1) = 1$$

Fonctions dérivées partielles

On définit la fonction dérivée partielle de f par rapport à x par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \end{array} \right.$$

(tout se passe comme si y et z étaient des constantes et on dérive f par rapport à x)
De mÎme on définit les fonctions dérivées partielles par rapport à y et par rapport à z.

Exemple 8 *(suite) La fonction dérivée partielle de f par rapport à x est*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{2x}{1+y^2} \end{array} \right.$$

La fonction dérivée partielle de f par rapport à y est

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{-2y}{(1+y^2)^2} \end{array} \right.$$

La fonction dérivée partielle de f par rapport à z est

$$\frac{\partial f}{\partial z} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{2z}{1+z^2} \end{array} \right.$$

EN RESUMÉ

Soit f une fonction de trois variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in D$.
La fonction $f_1 : x \mapsto f(x, y_0, z_0)$ est une fonction d'une seule variable. Si elle est dérivable, alors $f_1'(x_0)$ est appelé dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0, z_0) et est notée $f_1'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$.
On définit la fonction dérivée partielle de f par rapport à x par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \end{array} \right.$$

Truc : Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, on regarde y et z comme des constantes et on dérive $f(x,y,z)$ par rapport à x.

2.3.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

La fonction dérivée partielle par rapport à x est une fonction de trois variables et on peut à nouveau lui associer des dérivées partielles, on obtient les dérivées partielles deuxièmes par rapport à x, y ou z. Le théorème de Schwarz assure de plus les égalités

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}$$

...

Exemple 9 *(suite)*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{2}{1+y^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{-4xy}{(1+y^2)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{-4xy}{(1+y^2)^2} \end{array} \right.$$

2.4 Calcul approché et incertitudes

Plaçons-nous dans le cas des fonctions en une variable. Soit f une fonction en une variable x dérivable sur un intervalle I.
La définition de la dérivabilité de f en un point a de I permet d'écrire

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)\,h$$

pour h petit où $\sim$ signifie 'est approximativement égal à', ou encore

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a)$$

pour x proche de a.
Graphiquement, on a un approximation affine de la courbe de f au point a par sa tangente au point a.

Remarque 3 *On peut améliorer cette approximation à l'aide des développements limités.*

Dans les sciences expérimentales, on note Δx la variation de x et Δf la variation $f(x+h) - f(x)$ de f. On utilise le calcul approché précédent pour estimer l'erreur absolue $\Delta f(x)$:

$$\Delta f(x) \sim f'(x)\,\Delta x$$

et l'erreur relative $\dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}$:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \sim \frac{f'(x)}{f(x)}\,\Delta x$$

Remarque 4 *Pour les calculs sur l'erreur relative, on utilise* $\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \Delta \ln(|f(x)|)$.

Revenons au cas des fonctions en plusieurs variables.
Soit f une fonction de deux variables x et y définie sur un domaine D et admettant des dérivées partielles premières sur D.
Pour une petite variation de x, Δx et une petite variation de y, Δy, $f(x,y)$ subit une petite déformation $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ qui est approximativement égale à $\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y$:

$$\Delta f \sim \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y$$

On majore ainsi l'erreur absolue en valeur absolue :

$$|\Delta f| \leq |\frac{\partial f}{\partial x}|\,|\Delta x| + |\frac{\partial f}{\partial y}|\,|\Delta y|$$

Remarque 5 *La valeur absolue de l'erreur relative est encore appelée incertitude relative.*

Exemple 10 *Exemple du volume du cône* $V = \pi r^2 h/3$.
L'erreur absolue vérifie :

$$\Delta V \sim \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = \frac{2\pi r h}{3}\Delta r + \frac{\pi r^2}{3}\Delta h$$

Pour $|\Delta r| \leq 0,1$, $|\Delta h| \leq 0,1$, $r = 10$ *et* $h = 25$, *on obtient une majoration de l'incertitude absolue (valeur absolue de l'erreur absolue)*

$$|\Delta V| \leq 20\pi$$

et une majoration de l'incertitude relative :

$$\frac{|\Delta V|}{V} \leq \frac{20\pi}{\pi \times 100 \times 25/3} = 3/125 = 0,024$$

Comment obtenir l'erreur relative sans passer par le calcul de l'erreur absolue ?
L'erreur relative vérifie :

$$\frac{\Delta V}{V} = \Delta \ln(V) = \frac{\partial \ln(V)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial \ln(V)}{\partial h}\Delta h$$

or $\ln(V) = \ln(\pi/3) + 2\ln(r) + \ln(h)$ *donc* $\frac{\partial \ln(V)}{\partial r} = \frac{2}{r}$ *et* $\frac{\partial \ln(V)}{\partial h} = \frac{1}{h}$
Ainsi l'erreur relative sur V *peut-être exprimée en fonction de l'erreur relative sur* r *et de l'erreur relative sur* h *:*

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

Comme $|\Delta r|/r \leq 0,01$ *et* $|\Delta h|/h \leq 0,004$*, on obtient une majoration de la valeur absolue de l'erreur relative (appelée encore incertitude relative)*

$$\frac{|\Delta V|}{V} \leq 0,02 + 0,004 = 0,024$$

Exercices

Calcul de dérivées partielles.

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+z^2}{1+y^2}$.
   Exprimer les dérivées partielles de f en $(1,1,1)$.

2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f définie par
   $$f(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$
   Montrer que la quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (appelée laplacien de f) est nulle.

3. La température en un point (x,y) d'une fine plaque de métal est donnée par $T(x,y) = \dfrac{60}{1+x^2+y^2}$ où T est mesurée en $°C$ et x et y en mètres.
   Déterminer le taux de variation de la température par rapport à la distance au point $(2,1)$ dans la direction a) de l'axe (Ox) et b) de l'axe (Oy).

Calcul d'incertitudes.

4. La température, la pression et le volume d'un gaz parfait sont liés par une relation du type

$$P = k\,\frac{T}{V}$$

où k est une constante positive.
On réalise des mesures sur T et V et on suppose que l'on commet une incertitude relative sur la mesure de T majorée par $0,005$ et une incertitude relative sur la mesure de V majorée par $0,002$ (cela signifie que les rapports $\frac{|\Delta T|}{T}$ et $\frac{|\Delta V|}{V}$ sont inférieurs à $0,005$ et $0,002$ respectivement).
   (a) Que vaut $\ln(P)$?
   (b) En déduire une majoration de l'incertitude relative sur P en fonction de l'incertitude relative sur T et de l'incertitude relative sur V.
   (c) Donner une majoration de l'incertitude relative sur P pour les valeurs numériques données.

Compléments.

5. La surface corporelle S est donnée en fonction du poids P et de la taille T par la formule de Du Bois, utilisée en particulier en diététique :

$$S = 71,84\,\times\,T^{0,725}\,\times\,P^{0,425}$$

où S est exprimée en cm^2, T est exprimé en cm et P en kg.
   (a) Que vaut $\ln(S)$?
   (b) En déduire $\frac{\Delta S}{S}$ en fonction de $\frac{\Delta T}{T}$ et $\frac{\Delta P}{P}$.
   (c) En supposant que l'on réalise une incertitude relative majorée par $0,001$ sur la mesure de la taille et une incertitude relative majorée par $0,005$ sur la mesure du poids, déterminer une majoration de l'incertitude relative sur S.

6. On considère un cylindre dont l'aire A est donné par la formule :

$$A = A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

où r est le rayon et h la hauteur.
   (a) Dire pourquoi la fonction $A(r,h)$ est différentiable.
   (b) Déterminer les dérivées partielles premières de A pour $(r,h) = (3,1)$.
   (c) Supposons que le rayon passe de 3 à $3,05$ et la hauteur passe de 1 à $0,97$.
   1) A l'aide de la différentielle, estimer le changement d'aire qui en résulte.
   2) Calculer exactement ce changement d'aire.