Chapitre 4

Théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale

Dans cette partie on va montrer que le comportement local d'une application de classe C^1 est qualitativement déterminé par la différentielle en ce point.

4.1 Le théorème des fonctions implicites

Il arrive souvent qu'une fonction ne soit pas donnée "explicitement" comme $y = f(x)$ mais "implicitement" comme solution d'une équation de la forme $F(x, y) = 0$.

Dans cette partie on va donner des conditions sous-lesquelles une équation implicite $F(x, y) = 0$ a localement pour unique solution une fonction $y = y(x)$ ou $x = x(y)$, i.e. localement l'ensemble $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ est le graphe d'une fonction.

4.1.1 REMARQUE
$y = f(x) \Longleftrightarrow F(x, y) = 0$ où $F(x, y) = y - f(x)$.

4.1.2 EXEMPLE. 1) L'ensemble des solutions de $F(x, y) = x^2 + y^2 - a = 0$ est

(a) si $a > 0$, un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a}$.

(b) si $a = 0$, uniquement le point $(0, 0)$.

(c) si $a < 0$, l'ensemble est vide.

2) L'ensemble des solutions de $G(x, y) = xy = 0$ est est la réunion des axes de coordonnées.

On va regarder de plus près :

4.1.3 EXEMPLE. 1. Soit $(x, y) = (0, 0)$ solution de $F(x, y) = 0$ (exemple 1))

(a) $\boxed{a > 0}$

si $y \neq 0$, on peut exprimer y en fonction de x par $y = \sqrt{a - x^2}$ si $y > 0$ et $y = -\sqrt{a - x^2}$ si $y < 0$.

De même, si $x \neq 0$, on peut exprimer x en fonction de y par $x = \sqrt{a - y^2}$ si $x > 0$ et $x = -\sqrt{a - y^2}$ si $x < 0$.

Ainsi, localement au voisinage d'un point différent de $(0,0)$ on peut exprimer y en fonction de x ou x en fonction de y.

Par contre si $\boxed{a = 0}$, on a uniquement le point $(0,0)$ et donc l'ensemble des solutions de $F(x,y) = 0$ n'est pas un graphe.

Enfin, si $\boxed{a < 0}$, il n'y a pas de point au voisinage duquel on peut considérer le problème.

(b) Dans, l'exemple 2) on a, au voisinage de $(0,0)$, deux fonctions solutions de $G(x,y) = 0$, à savoir $y = 0$ ou $x = 0$.

4.1.4 Remarque

2. Dans le cas $a > 0$, on $\nabla F(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$, et donc F n'a pas de point critique tel que $F(x,y) = 0$.

   Par contre, pour $a = 0$ ou dans l'exemple 2) on a $\nabla F(0,0) = \nabla G(0,0) = (0,0)$ et comme solution un point unique ou pas d'unicité des solutions au voisinage de $(0,0)$.

Soit un système de p-équations à p-inconnues $y = (y_1, \ldots, y_p)$ dépendant de k-paramètres $x = (x_1, \ldots, x_k)$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_p) = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_p(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_p) = & 0 \end{cases}$$

En posant $f(x,y) = (f_1(x,y), \cdots, f_p(x,y))$, on définit une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et résoudre le système revient à trouver les solutions de $f(x,y) = 0$.

Comme le problème est nonlinéaire, on doit avoir une solution particulière pour s'assurer que l'ensemble des solutions n'est pas vide; soit alors $(a,b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ telle que $f(a,b) = 0$.

On cherche des conditions sous-lesquelles il existe une unique fonction $y = g(x)$, vérifiant $b = g(a)$ et telle que $f(x, g(x)) = 0$ pour tous x dans un voisinage de a dans $\mathbb{R}^k$. On va supposer que f est de classe C^1 et on cherche une solution g de classe C^1.

On suit maintenant l'idée fondamentale du calcul différentiel, qui dit qu'un problème local pour une fonction différentiable doit être posé pour sa meilleure approximation affine local et que la réponse "quantitative" devrait être la même.

On va donc se poser le problème pour la meilleure approximation affine de f en (a,b) i.e. l'application affine tangente.

$$f(x,y) = f(a,b) + Df(a,b).(x-a, y-b) + \|(x-a, y-b)\|.\varepsilon(x,y) \tag{4.1}$$

Ainsi, l'application affine tangente est égale à $f(a,b) + Df(a,b).(x-a, y-b) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b)(x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a,b)(y_j - b_j)$.

et $f(x,y) = 0$ devient, (puisque $f(a,b) = 0$)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b)(x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a,b)(y_j - b_j) = 0$$

ceci s'écrit aussi

$$D_x f(a,b)(x-a) + D_y f(a,b)(y-b) = 0 \tag{4.2}$$

où

$$D_x f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a,b) \end{pmatrix} \text{ et } D_y f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}$$

Alors (4.2) $\iff D_y f(a,b)(y-b) = -D_x f(a,b)(x-a)$ maintenant si on veut avoir une solution unique il faudrait supposer que le système est de Cramer i.e. $D_y f(a,b)$ inversible ($\Leftrightarrow \det D_y f(a,b) \neq 0$) on aura alors :

$$y = b - \left[D_y f(a,b)\right]^{-1} . D_x f(a,b)(x-a).$$

Donc, la condition locale que nous recherchons est "l'application $D_y f(a,b)$ est inversible", cette condition est celle qu'on impose dans le cas du théorème des fonctions implicites linéaire (voir 4.3.1)

On va montrer qu'elle est suffisante pour entraîner l'existence d'une unique solution locale pour l'équation $f(x,y) = 0$.

Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \to F$ une application de classe C^1. On note x la variable dans U et y la variable dans V. Pour $(a,b) \in U \times V$, on note $D_y f(a,b)$ la différentielle de f par rapport à y en (a,b) de l'application composée $\begin{cases} V & \longrightarrow & \{u\} \times V & \longrightarrow & F \\ y & \mapsto & (a,y) & \mapsto & f(a,y). \end{cases}$

On définit de même $D_x f(a,b)$ la différentielle de f par rapport à x.

On notera que $D_y f(a,b) \in \mathcal{L}(E_2, F)$ et $D_x f(a,b) \in \mathcal{L}(E_1, F)$.

4.1.5 Théorème (Le théorème des fonctions implicites)

Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \to F$ une application de classe C^r ($r \geq 1$.)

Soit $(a,b) \in U \times V$ tel que $f(a,b) = 0$ et $D_y f(a,b) \in Isom(E_2, F)$.

Alors, il existe un voisinage ouvert de a, $U_a \subset U$, un voisinage ouvert de b, $V_b \subset V$ et une application de classe C^1, $\varphi : U_a \to V_b$ tels que

1.) $\varphi(a) = b$
$\forall (x,y) \in U_a \times V_b,\ f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in U_a,\ y = \varphi(x)$ i.e.
$\{(x,y) \in U_a \times V_b \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U_a\}$.

2.) La différentielle de φ en a est donnée par la formule

$$D\varphi(a) = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b).$$

3.) l'application φ est de classe C^r.

Démonstration: **1.)** Commençons la démonstration par une petite digression. Par translation et composition on va se ramener au cas où $F = E_2$, $a = 0$, $b = 0$ et $D_y f(0,0) = Id_{E_2}$.

En effet, posons pour tout $x \in U - a := \{u - a; u \in U\}$ (le translaté de U par le vecteur $-a$) et $y \in V - b := \{v - b; v \in V\}$ (le translaté de V par le vecteur $-b$), $\tilde{f}(x,y) = \left(D_y f(a,b)\right)^{-1}(f(x+a, y+b))$ alors $\tilde{f} : (U-a)\times(V-b) \to E_2$, $\tilde{f}(0,0) = \left(D_y f(a,b)\right)^{-1}(f(a,b)) = 0$ et $D_y\tilde{f}(0,0) = \left(D_y f(a,b)\right)^{-1}(Df(a,b)) = Id_{E_2}$.
Enfin, $\tilde{f}(x,y) = 0$ dans $(U-a)\times(V-b)$, est équivalent à $f(x,y) = 0$ dans $U \times V$.

On est donc ramené à traiter le cas $E_2 = F$, $a = 0$, $b = 0$ et $D_y f(0,0) = Id_F$, ce que nous supposerons dans la suite. On notera aussi E_1 par E.

Posons $g(x,y) = y - f(x,y)$ de sorte que $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = y$ i.e. y est un point fixe de l'application $g_x(y) = g(x,y)$.

D'autre part, comme g est de classe C^1, $g(0,0) = 0$ et $D_y g(0,0) = Id_F - D_y f(0,0) = 0$, par continuité de $D_y g$ en $(0,0)$, il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que $\bar{B}(0,r) \subset U$ et $\bar{B}(0,s) \subset V$ et $\|Dg(x,y)\| \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \bar{B}(0,r) \subset U$ et $\forall y \in \bar{B}(0,s) \subset V$ D'après le théorème des accroissements finis, on aura $\|g(x,y) - g(x,y')\| \leq \frac{1}{2}\|y - y'\|$, pour tout $x \in \bar{B}(0,r)$ et $y \in \bar{B}(0,s)$.

Quitte à prendre r plus petit, par continuité de f en $(0,0)$, on peut supposer que $\|f(x,0)\| \leq \frac{s}{2}$ pour tout $x \in \bar{B}(0,r)$. D'où, pour tout $x \in \bar{B}(0,r)$ et $y \in \bar{B}(0,s)$ on a $\|g(x,y)\| \leq \|g(x,y) - g(x,0)\| + \|g(x,0)\| \leq \frac{1}{2}\|y\| + \frac{s}{2} = s$ Ainsi, pour tout $x \in \bar{B}(0,r)$, l'application $g_x : \bar{B}(0,s) \to \bar{B}(0,s)$ définie par $g_x(y) = g(x,y)$ vérifie $\|g_x(y) - g_x(y')\| \leq \frac{1}{2}\|y - y'\|$.

Donc, g_x est une application strictement contractante de la boule fermée $\bar{B}(0,s)$ dans elle même; et d'après le théorème du point fixe 4.3.13, g_x à un unique point fixe $\varphi(x) \in \bar{B}(0,s)$, i.e. que $y = \varphi(x)$. De plus (voir 4.3.15) l'application $\varphi : \bar{B}(0,r) \to \bar{B}(0,s)$ telle que $x \mapsto y = \varphi(x)$ est continue et vérifie $y = \varphi(x) \Leftrightarrow g(x,\varphi(x)) = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x,\varphi(x)) = 0$ i.e. $\{(x,y) \in U_a \times V_b \,|\, f(x,y) = 0\} = \{(x,\varphi(x)) \,|\, x \in U_a\}$ avec $U_a = B(0,r)$ et $V_b = B(0,s)$.

2.) Pour x $x+h$ éléments de U_a, posons $k = \varphi(x+h) - \varphi(x)$
Alors $0 = f(x+h, \varphi(x+h)) = f(x+h, \varphi(x)+k) = D_x f(x,\varphi(x)).h + D_y f(x,\varphi(x)).k + o(\|h\|,\|k\|)$ d'où $k = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x)).h + o(\|h\|)$, ce qui entraîne $\varphi(x+h) - \varphi(x) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x)).h + o(\|h\|)$.
Ainsi, $D\varphi(x) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x))$ pour tout $x \in U_a$ ceci montre, d'après la continuité de $\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1}$ et $D_x f(x,\varphi(x))$, que φ est de classe C^1.

3.) On montre que φ est de classe C^r en utilisant **2.)** et une récurrence sur l'entier $r \geq 1$ et 4.3.11. ∎

Étude pratique

4.1.7 THÉORÈME (THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES EN DIMENSION FINIE) Soit $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \times V \to \mathbb{R}^p$, $f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_p(x,y))$ une application de classe C^1.

Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et $D_y f(a,b) \in Isom(\mathbb{R}^p)$ c-à-d

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

Alors, il existe un voisinage ouvert de a, $U_a \subset U$, un voisinage ouvert de b, $V_b \subset V$ et une application de classe C^1, $g : U_a \to V_b$ tels que

1. $g(a) = b$
2. $\forall (x,y) \in U_a \times V_b$, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$
3. La différentielle de g en a est donnée par la formule

$$Dg(a) = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b).$$

$$J_g(a) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a,b) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a,b) \end{pmatrix}$$

Si f est de classe C^r, $r \geq 1$, il en est de même pour g.

4.1.8 REMARQUE. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites dès que le déterminant du mineur $p \times p$, $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}$ est non nul.

Alors, d'après le théorème il existe des voisinage ouvert U_a de a et V_b de b et une application $\phi : U_a \to V_b$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_p(x))$ telle que

1. $\phi(a) = b$
2. pour tout $(x,y) \in U_a \times V_b$ on a

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_p) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \phi_1(x_1, \ldots, x_k) = 0 \\ \vdots \\ y_p = \phi_p(x_1, \ldots, x_k) = 0. \end{cases}$$

4.1.9 EXEMPLE. On veut montrer que pour un choix convenable d'un intervalle I centré en $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $y^2x_1 + e^{2y} + x_2 = 0$ a une solution unique $y \in I$ si $x = (x_1, x_2)$ est dans un certain voisinage V de $(1, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

On commence par définir $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = y^2x_1 + e^{2y} + x_2$, puis comme $f(1, -1; 0) = 0$, $D_y f(x, y) = 2x_1y + 2e^{2y}$ d'où $D_y f(1, -1, 0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites, assure l'existence d'un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, V de $(1, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application C^∞ $\phi : U \to V$ tels que $\phi(1, -1) = 0$ et $y = \phi(x)$. D'autre part : $D_x f(x, y) = (y^2, 1)$ d'où
$D\phi(1, -1) = -\left(D_y f(1, -1; 0)\right)^{-1} \circ D_x f(1, -1; 0) = -\frac{1}{2}(0, 1) = (0, -\frac{1}{2})$.

4.1.10 EXEMPLE. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, x^2 - z^2)$, et (x_0, y_0, z_0) tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. On a $J_f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & -2z_0 \end{pmatrix}$.

Si $y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$, alors la matrice extraite d'ordre 2,
$D_{(y,z)} f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -2y_0 & 0 \\ 0 & -2z_0 \end{pmatrix}$ est inversible et d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $f(x, y, z) = 0$ a une solution locale unique de classe C^∞ au voisinage de x_0, de la forme $(y, z) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$

Si $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, alors la matrice extraite d'ordre 2,
$D_{(x,y)} f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2x_0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $f(x, y, z) = 0$ a une solution locale unique de classe C^∞ au voisinage de z_0, de la forme $(x, y) = (\psi_1(z), \psi_2(z))$

4.2 Le théorème d'inversion

4.2.1 Difféomorphisme (ou changement de variables)

4.2.1 DÉFINITION

Soient E et F deux evn. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts et $f : U \to V$ une bijection.

1. On dit que f est **homéomorphisme** si, f et f^{-1} sont continues.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un **difféomorphisme** de classe C^r si, f et f^{-1} sont de classe C^r.

4.2.2 REMARQUE. Si f est un difféomorphisme alors :

1. f est un homéomorphisme
2. Les différentielles de f et f^{-1} en un point $a \in U$ sont liées par :

$$D f^{-1}(f(a)) \circ Df(a) = Id_E$$

$$Df(a) \circ D f^{-1}(f(a)) = Id_F$$

ceci entraîne que $D f^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$. Ainsi, si f est un difféomorphisme $Df(a) : E \to F$ est un isomorphisme linéaire.

On notera par $Isom(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E,F)$ des isomorphisme de E dans F i.e. des applications linéaires inversibles : $T \in Isom(E,F)$, entraîne que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

On notera simplement $Isom(E)$ si $E = F$.

4.2.3 REMARQUE. Deux mises en gardes

i) f est un homémorphisme de classe C^r n'entraîne pas que f^{-1} est différentiable. Par exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.

ii) Contrairement, au cas d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui est injective sur un intervalle dès que sa dérivée ne s'y annule pas; une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 2$, n'est pas nécessairement injective même si sa jacobienne est inversible en tout point de cet ouvert.
Par exemple : si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ on a
$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ et $\det J_f(x,y) = e^{2x} \neq 0$.
Mais, $f(0,0) = f(0,2\pi)$, montre que f n'est pas injective.

4.2.2 Le théorème d'inversion locale

Cette section est consacré au problème suivant : comment peut-on reconnaître qu'une application est un difféomorphisme et quelle régularité à l'application réciproque ?

On à déjà vu qu'avoir une différentielle inversible est une condition nécessaire.

Le théorème d'inversion locale dit que cette condition est suffisante pour inverser localement.

4.2.4 THÉORÈME (LE THÉORÈME D'INVERSION LOCALE)
Soient E et F deux espaces de **Banach**. Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application de classe C^r ($r \in \mathbb{N}^*$), telle que $Df(a) \in Isom(E,F)$. Il existe alors un ouvert U_a de U contenant a et un ouvert $V_{f(a)}$ de F contenant $f(a)$ tels que :

la restriction $f|_{U_a} : U_a \to V_{f(a)} = f(U_a)$ est un difféomorphisme de classe C^r.

Démonstration: On pose pour tout $(y,x) \in F \times U$, $g(y,x) = y - f(x)$. Alors, g ainsi définie est une application de classe C^r de $F \times U$ sur F telle que $g(y,x) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ et $D_x g(f(a),a) = -Df(a) \in Isom(E,F)$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $V_f(a)$ de $f(a)$ dans F et un voisinage ouvert U_a de a dans U et une application de classe C^r, $\varphi : V_f(a) \to U_a$, telle que $x = \varphi(y)$ et pour tout $y \in V_f(a)$ on a $g(y,\varphi(y)) = 0$ i.e. $f(\varphi(y)) = y$. D'où la restriction de f à U_a est inversible et $(f|_{U_a})^{-1} = \varphi$,

ainsi $f|_{U_a} : U_a \to V_f(a)$ est un difféomorphisme de classe C^r.

4.2.6 THÉORÈME (LE THÉORÈME D'INVERSION LOCALE)
. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) \in Isom(\mathbb{R}^n)$ i.e. $\det J_f(a) \neq 0$. Il existe alors un ouvert U_a de U contenant a et un voisinage ouvert V de $f(a)$ tels que :

1. $V = f(U_a)$
2. La restriction $f|_{U_a} : U_a \to V = f(U_a)$ est un difféomorphisme de classe C^1.
3. Si de plus, f est de classe C^r, l'application inverse $f^{-1} : V \to U_a$ est de classe C^r, i.e. f induit un difféomorphisme de classe C^r de U_a sur $V = f(U_a)$.

4.2.7 REMARQUE. On ne peut pas se passer de l'hypothèse f de classe C^r, $r \geq 1$ dans le théorème d'inversion locale.

En effet, si on considère la fonction $f(x) = x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors, $f'(0) = 1 \neq 0$ i.e. $Df(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application identité, mais il n'existe pas de voisinage U_0 de 0 tel que $f|_{U_0} : U_a \to V = f(U_0)$ soit bijective. En effet, l'équation $f(x) = y$ a au moins 2 solutions pour tout y assez petit, f n'est injective dans aucun voisinage de 0.

On ne peut pas appliquer le théorème d'inversion locale dans ce cas, car f n'est pas de classe C^1. En effet, $f'(x) = 1 + 4x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ainsi $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = -1 \to -1 \neq 0 = f'(0)$ lorsque $k \to +\infty$, n'est donc pas continue.

4.2.8 COROLLAIRE (THÉORÈME D'INVERSION GLOBALE)
Soient E et F deux espaces de Banach.

Soit $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application de classe C^r.

On suppose que f est **injective** et que $\forall a \in U$, $Df(a) \in Isom(E, F)$.

Alors $f : U \to f(U)$ est un difféomorphisme de classe C^r.

Démonstration: D'après le théorème d'inversion locale f est un difféomorphisme local de classe C^r.

Ceci implique en particulier que $V = f(U)$ est voisinage de tout ses points, donc un ouvert de F.

l'hypothjèse d'injectivité de f c-à-d la bijectivité de $f : U \to f(U)$, permet de définir un inverse f^{-1}.

Comme localement, l'inverse de f coïcident avec f^{-1}, f^{-1} est alors de classe C^r.

Donc f est un difféomorphisme "global" de classe C^r. ∎

4.2.10 EXEMPLE (LES COORDONÉES POLAIRES). .

Soit $\Phi : U \to V$, définie par $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

où $U = \{(r, \theta); r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } -\pi < \theta < \pi\}$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$

Alors

1. Φ est de classe C^∞.

2. Φ est injective. En effet si $\Phi(r,\theta) = \Phi(r',\theta')$ alors $\|\Phi(r,\theta)\| = r = r' = \Phi(r',\theta')$ d'où $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$ et donc $\theta' = \theta$. Finalement $(r,\theta) = (r',\theta')$.
3. pour tout $(r,\theta) \in U$, $\det J_\Phi(r,\theta) \neq 0$.
   en effet, $J_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc $\det J_\Phi(r,\theta) = r \neq 0$.

Le théorème d'inversion globale, nous affirme alors que Φ est difféomorphisme de classe C^∞.

On pourrait faire mieux et déterminer explicitement l'inverse de Φ.

L'inverse de Φ, $\Psi : V \to U$ qui à $(x,y) \in U$ associe ses "coordonées polaires" $(r,\theta) \in U$ est définie par

$$\Psi(x,y) = \left(\|(x,y)\|, \arg\left(\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}\right)\right) = \left(\|(x,y)\|, 2\arctan\left(\frac{y}{\|(x,y)\| + x}\right)\right)$$

où $\arg : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\} \to]-\pi,\pi[$ est la fonction argument, inverse de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ et $\mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\| = 1\}$ le cercle unité.

En effet, pour $u = (x,y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$:

$$\arg(u) = \theta \text{ si et seulement si } u = (\cos\theta, \sin\theta).$$

4.2.11 REMARQUE. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y}{r+x}$, d'où $\theta = 2\arctan\frac{y}{r+x}$.

4.3 Annexe

4.3.1 Théorème des fonctions implicites linéaire

4.3.1 THÉORÈME

1. version algébrique : un système de p équations linéairement indépendantes en $k+p$ variables définit p des ces variables comme fonctions linéaires des k variables restantes.
2. version géométrique : le noyau d'une application linéaire $L : \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{R}^p$ de rang p (i.e. surjective) est le graphe d'une application $l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ i.e. $ker(L) = \{(x, l(x)) \mid x \in \mathbb{R}^k\}$.

Démonstration: $L : \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{R}^p$ de rang p, d'après le théorème du rang : $\dim Ker(L) = k$. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,k+p}$ est la matrice représentative de L dans les bases canoniques, alors l'équation $L(z) = 0$ se traduit par un système de p équations linéaires à $p+k$ inconnues $z = (z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+p})$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \ldots + a_{1,k}z_k + a_{1,k+1}z_{k+1} + \ldots + a_{1,k+p}z_{k+p} = & 0 \\ a_{21}z_1 + \ldots + a_{2,k}z_k + a_{2,k+1}z_{k+1} + \ldots + a_{2,k+p}z_{k+p} = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}z_1 + \ldots + a_{p,k}z_k + a_{p,k+1}z_{k+1} + \ldots + a_{p,k+p}z_{k+p} = & 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système d'équations, comme le rang de A est p, la matrice A à p vecteurs colonnes indépendant, et quitte à réordonner les colonnes de A (et avec les variables z_j), on peut supposer que les p dernières colonnes forment un système linéairement indépendant et donc une matrice carrée inversible d'ordre p qu'on notera C. On a alors en posant $x = (z_1, \ldots, z_k)$ et $y = (z_{k+1}, \ldots, z_{k+p})$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{p,k} \end{pmatrix}}_{B}\!\!\underbrace{\begin{matrix} a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,k+p} \\ a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,k+1} & \ldots & a_{p,k+p} \end{matrix}}_{C} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \vdots \\ z_{k+p} \end{pmatrix} = (B, C) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

i.e. $Bx + Cy = 0$. Comme C est inversible, on peut résoudre et obtenir $y = -C^{-1}Bx$ Ainsi$L(x, y) = 0$ si et seulement si $y = y = -C^{-1}Bx$. Soit $l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ définie par $l(x) = -C^{-1}Bx$.

Alors $ker(L) = \{(x, l(x)) \mid x \in \mathbb{R}^k\}$.

4.3.2 Résultats préliminaires utilisés dans la démonstration du théorème des fonctions implicites

4.3.3 PROPOSITION

On note par $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversible c-à-d

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$$

Soit l'application $inv : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par $inv(A) = A^{-1}$ Alors

1. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. l'application $\begin{array}{rcl} inv : GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$ est de classe C^∞ et de différentielle l'application $H \mapsto Dinv(A).H = -A^{-1}HA^{-1}$.

Démonstration: 1. On a vu que le déterminant est une forme n-linéaire, donc de classe C^∞, en particulier continue, alors $\det^{-1}(\{0\})$ est un fermé, image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue, d'où $GL_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ est un ouvert.

2. On voit directement de l'expression de A^{-1}, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, que l'application inv est de classe C^∞.
   En effet, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t com(A)$
   où la comatrice $com(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ avec

A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ obtenue à partir de A en supprimant la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne.

Les coefficients de A^{-1} sont de la forme $\frac{(-1)^{i+j}\det A_{ij}}{\det A}$ donc de classe C^∞, ainsi inv est de classe C^∞ car ses n^2 composantes le sont. ■

4.3.5 Définition

1. Un espace métrique (E, d) est dit **complet** si toute suite de cauchy est convergente.
2. Un espace vectoriel normé **complet** est appelé espace de **Banach**.

4.3.6 Exemple. Un espace vectoriel de **dimension finie** est un espace de Banach pour toute norme.

4.3.7 Proposition

(a) Montrer que pour $T, H \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|T \circ H\| \leq \|T\|.\|H\|$ En particulier, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit F un espace de Banach. Soit $\{x_n\}$ une suite de F. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0}\|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge dans F, c-à-d qu'il existe un vecteur $S \in F$ tel que $\lim_{n\to+\infty}\|S_n - S\| = 0$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

(c) Montrer que si F est un espace de Banach, il en est de même de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration: Exercice ■

Le lemme suivant concerne la structure des isomorphismes d'un espace de Banach.

4.3.9 Proposition

Soit E un espace de Banach. Alors

1. $Isom(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. L'application $inv : Isom(E) \to Isom(E)$, définie par $inv(T) = T^{-1}$ est de classe C^∞. De plus, la différentielle de inv en un point $T \in Isom(E)$, est l'application $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $H \mapsto -T^{-1}HT^{-1}$.

Démonstration: **(1)** Soit Soit $H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Comme $\mathcal{L}(E)$ est de Banach, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(HT^{-1})^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$, car la série $\sum_{n\geq 0}\|(HT^{-1})^n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, en effet cette dernière converge car, par hypothèse $\|H\|.\|T^{-1}\| < 1$.

$\sum_{n\geq 0}\|(HT^{-1})^k\| \leq \sum_{n\geq 0}\|H\|.\|T^{-1}\|^n = \frac{1}{1-\|H\|.\|T^{-1}\|}$

On note par S la somme de la série $T^{-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(HT^{-1})^n$.

On va vérifier que $S(T+H) = (T+H)S = Id_E$.

$$(T+H)S = (T+H)\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(T+H)S_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (T+H).T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(HT^{-1})^k\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (Id_E+HT^{-1})\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(HT^{-1})^k\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(HT^{-1})^k + (-1)^k(HT^{-1})^{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(HT^{-1})^k - (-1)^{k+1}(HT^{-1})^{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(Id_E - (-1)^{n+1}(HT^{-1})^{n+1}\right) = Id_E = S(T+H).$$

On a montrer que pour tout $T \in Iso(E)$, la boule ouverte de centre T et de rayon $\frac{1}{\|T-1\|}$ est contenue dans $Isom(E)$, par suite $Isom(E)$ est un voisinage de tous ses points, donc un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

(2) Montrons maintenant que inv est différentiable. On a

$$inv(T+H) - inv(T) = (T+H)^{-1} - T^{-1} = T^{-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(HT^{-1})^n - T^{-1}$$

$$= T^{-1}\sum_{n\geq 1}(-1)^n(HT^{-1})^n = -T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}\sum_{n\geq 2}(-1)^n(HT^{-1})^n$$

$$= -T^{-1}HT^{-1} + \|H\|.\varepsilon(H)$$

et $\lim_{H\to 0}\varepsilon(H) = \lim_{H\to 0}\frac{T^{-1}\sum_{n\geq 2}(-1)^n(HT^{-1})^n}{\|H\|} = 0.$

Donc inv est différentiable et pour tout $T \in Isom(E)$, sa différentielle au point T est l'application $Dinv : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $H \mapsto -T^{-1}HT^{-1}$.

De plus, pour $T_0, T \in Isom$ et $H \in \mathcal{L}(E)$ on a

$$(Dinv(T) - Dinv(T_0))(H) = -T^{-1}HT^{-1} + T_0^{-1}HT_0^{-1}$$

$$= \left(-T^{-1}HT^{-1} - T^{-1}HT_0^{-1}\right) + \left(-T^{-1}HT_0^{-1} - T_0^{-1}HT_0^{-1}\right)$$

$$= \left(-T^{-1}H(T^{-1} - T_0^{-1})\right) + \left((T_0^{-1} - T^{-1})HT_0^{-1}\right)$$

D'où

$$\|(Dinv(T) - Dinv(T_0))(H)\| \leq= \|T^{-1}\|.\|H\|.\|T^{-1} - T_0^{-1}\| + \|T_0^{-1}\|.\|H\|.\|T^{-1} - T_0^{-1}\|$$

$$= \left(\|T_0^{-1}\| + \|T^{-1}\|\right).\|T^{-1} - T_0^{-1}\|.\|H\|.$$

ceci entraîne que

$$\|(Dinv(T) - Dinv(T_0))\| \leq \left(\|T_0^{-1}\| + \|T^{-1}\|\right).\|T^{-1} - T_0^{-1}\|$$

Maintenant si T tends T_0, par continuité de inv on aura $\|T^{-1} - T_0^{-1}\|$ qui tends vers 0, d'où la continuité de $Dinv$ c-à-d que inv est de classe C^1.

On montre de la même manière que inv est de classe C^∞.■

4.3.11 PROPOSITION

Soient E et F deux espaces de Banach. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts et $f : U \to V$ une bijection.

Soit $r \geq 1$. Si f et de classe C^r et f^{-1} est différentiable alors f^{-1} est de classe C^r, c-à-d que f est un difféomorphisme de classe C^r.

Démonstration: L'application $y \mapsto Df^{-1}(y) = \big(Df(f^{-1}(y))\big)^{-1}$ est continue car, elle est la composition des trois applications continues suivantes : $y \in V \mapsto f^{-1}(y) \in U$, $x \in U \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in Isom(E,F) \to T^{-1} \in Isom(F,E)$. Donc f^{-1} est de classe C^1.

Par dérivation des applications composées dans la formule de Df^{-1}, on voit que si f^{-1} est de classe C^k pour $k \leq r-1$, alors Df^{-1} est de classe C^k. Par suite f^{-1} est de classe C^r. On a donc montrer par récurrence que f^{-1} est de classe C^r.■

On aura aussi besoin du théorème du point fixe (aussi connu comme le théorème de Picard) et de sa version à paramètre.

4.3.13 THÉORÈME (LE THÉORÈME DU POINT FIXE)

Soit (E,d) un espace métrique **complet**. et $\phi : E \to E$ une application **strictement contractante** c-à-d qu'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que $\forall x,y \in E$ on a $d(\phi(x),\phi(y)) \leq kd(x,y)$.

Alors l'application ϕ admet un point fixe unique, c-à-d il existe un unique point $z \in E$ tel que $\phi(z) = z$. De plus, pour tout $a \in E$, la suite récurrente définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \phi(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, converge vers le point fixe z et on a l'estimation suivante :

$$d(z,x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a,\phi(a))$$

en particulier (pour $n = 0$) on a : pour tout $a \in E$

$$d(z,a) \leq \frac{1}{1-k} d(a,\phi(a)).$$

Démonstration: Comme ϕ est une application de E dans E, la suite récurrente $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \phi(x_n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. par récurrence sur n on a :

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(\phi(x_{n-1}),\phi(x_n)) \leq k(x_{n-1},x_n) \leq \ldots \leq k^n d(x_0,x_1)$$

Une application répétée de l'inégalité triangulaire donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p})$$

$$\leq (1 + \ldots + k^{p-1})k^n d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, \phi(a)).$$

En d'autres termes la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Comme E est complet, il existe $z \in E$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = z$.

La continuité de ϕ, nous donne alors

$$\phi(z) = \phi(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = z$$

c-à-d que z est un point fixe de ϕ. On a aussi l'unicité du point fixe z, en effet, si z' est un autre point fixe de ϕ, on aura

$$0 < d(z, z') = d(\phi(z), \phi(z')) \leq kd(z, z') < d(z, z')$$

ce qui est absurde.

Finalement, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, \phi(a))$ on a

$$d(x_n, z) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, \phi(a))$$

on obtient ainsi l'estimation désirée. ■

4.3.15 COROLLAIRE (CONTINUITÉ DU POINT FIXE EN FONCTION D'UN PARAMÈTRE)

Soit (E, d) un espace métrique **complet** et (T, d') un espace métrique.
Soit $F : T \times E \to E$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ une application continue.
On suppose qu'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que pour tout $t \in T$, l'application $F_t : E \to E$, $x \mapsto F(t, x)$ soit strictement contractante de rapport k i.e. $d(F(t, x), F(t, x')) \leq kd(x, x')$ pour tout $x, x' \in E$.
On note par $x(t)$, l'unique point fixe de F_t.

Alors l'application $T \to E$, $t \mapsto x(t)$ est continue.

Démonstration: Soit $t_0 \in T$, d'après le théorème du point fixe, appliqué à $\phi = F_t$, $z = x(t)$ et $a = x(t_0)$ on a :
$d(x(t_0), x(t)) \leq \frac{1}{1-k} d(x(t_0), F_t(x(t_0))) = \frac{1}{1-k} d(F(t_0, x(t_0)), F(t, x(t_0)))$ et par continuité de F on aura $\lim_{t\to t_0} d(x(t_0), x(t)) = 0$ i.e. la continuité de $x(t)$ en t_0. ■