Chapitre 3

Extrema locaux (ou relatifs)

3.0.77 DÉFINITION

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert d'un espace vectoriel normé E et $a \in U$.

On dit que f présente un **minimum local** (respectivement un **maximum local**) au point a si $f(a) \leq f(x)$ (respectivement $f(a) \geq f(x)$) dans un voisinage de a.

On dit que f présente un **extremum local** au point a, si elle présente soit un minimum local, soit un maximum local en ce point.

L'extremum local est dit strict s'il existe un voisinage de a où cet extremum n'est réalisé qu'au point a.

On dit que f présente un **extremum global (ou absolu)** au point a, si l'inégalité est vrai pour tout $x \in U$.

3.0.78 REMARQUE

f a un extremum local en a si et seulement si $f(x) - f(a)$ a un signe constant au voisinage de a. Le signe est positif si a est un minimum local et négatif si c'est un maximum local.

3.0.79 DÉFINITION

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, U ouvert d'un espace vectoriel normé E. On dit qu'un point $a \in U$ est un point **critique** de f si $Df(a) = 0$.

3.0.8 Une condition nécessaire

Soit un entier $p \geq 2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction p fois différentiables au point $a \in U$.

On suppose que $D^m f(a) = 0$ pour tout $1 \leq m < p$ et que $D^p f(a) \neq 0$.

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre p en a on a

$f(a+h) - f(a) = \dfrac{1}{p!} D^p f(a).h^p + \|h\|^p \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Comme, $D^p f(a) \neq$

0, il existe $h \in E$ telle que $D^p f(a).h^p \neq 0$. Pour un tel h et $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(a+th) - f(a) = \frac{1}{p!} D^p f(a).(th)^p + \|th\|^p \varepsilon(th) = t^p \left(\frac{1}{p!} D^p f(a).h^p + \left(\frac{|t|}{t}\right)^p \|h\|^p \varepsilon(th) \right).$$
Comme, $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{p!} D^p f(a).h^p + \left(\frac{|t|}{t}\right)^p \|h\|^p \varepsilon(th) \right) = \frac{1}{p!} D^p f(a).h^p \neq 0$, il existe $\delta >$ 0 tel que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, le signe de $f(a+th) - f(a)$ est égal à celui de $t^p \frac{1}{p!} D^p f(a).h^p$. Alors

1. Si p est impair, $t^p \frac{1}{p!} D^p f(a).h^p$ change de signe et avec t^p, et par suite $f(a+th) - f(a)$ change de signe au voisinage de a, donc f n'a pas d'extremum en a.
2. Si p est pair, le signe de $D^p f(a).h^p$ est celui de $f(a+th) - f(a)$ et donc si f a un minimum local en a (resp. un maximum local en a) $D^p f(a).h^p \geq 0$ (resp. $D^p f(a).h^p \leq 0$)

On a donc montré

3.0.80 Théorème (Une condition nécessaire)
Soit un entier $p \geq 2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction p fois différentiables au point $a \in U$.
On suppose que $D^m f(a) = 0$ pour tout $1 \leq m < p$ et que $D^p f(a) \neq 0$.
Alors pour que f admette un minimum local en a (resp. un maximum local en a), il faut que le polynôme $D^p f(a).h^p$ soit positif (resp. le polynôme $D^p f(a).h^p$ négatif) i.e pour tout $h \in E$, $D^p f(a).h^p \geq 0$ (resp. pour tout $h \in E$, $D^p f(a).h^p \leq 0$.)

3.0.81 Remarque
La condition précédente n'est pas suffisante ; par exemple si $f(x,y) = x^4 - y^8$ alors $p = 4$ et pour $h = (x,y)$, $D^4 f(0,0).h^4 = x^4 \geq 0$, mais f n'admet pas de minimum en $(0,0)$ car $f(x,0) = x^4$ et $f(0,y) = -y^8$, et donc $f(x,y) - f(0,0)$ change de signe au voisinage de $(0,0)$.

Cette condition, comme nous l'avons constaté, entraîne que l'entier p est pair d'où

3.0.82 Corollaire (la condition nécessaire sur la différentielle)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert d'un espace vectoriel normé E et $a \in U$.
Si f est différentiable et présente un extremum local en a, alors a est un point critique i.e. $Df(a) = 0$.

3.0.83 Remarque.

1. Le corollaire précédent permet de limiter la recherche des extrema locaux aux points critiques.
2. La réciproque est fausse, un point peut être critique sans présenter d'extremum local : par exemple
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ à $(0,0)$ comme point critique sans être un extremum. En effet, $f(x,0) > f(0,0) > f(0,y)$ si $xy \neq 0$.

3.0.84 DÉFINITION
Un point critique de f qui n'est pas un extremum local est dit point selle (ou col).

3.0.9 Un condition suffisante

3.0.85 DÉFINITION
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ un polynôme p-homogène.
On dit que ϕ est **défini positif** s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que :
$\phi(h) \geq \lambda \|h\|^p$ pour tout $h \in E$.
On dit que ϕ est **semi-défini positif** si :
$\phi(h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.
On dit que ϕ est **défini négatif** s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que :
$\phi(h) \leq -\lambda \|h\|^p$ pour tout $h \in E$.
On dit que ϕ est **semi-défini négatif** si :
$\phi(h) \leq 0$ pour tout $h \in E$.
On dit que ϕ est **indéfini** s'il existe v et w in $E \setminus \{0\}$ tels que :
$\phi(v) < 0$ et $\phi(w) > 0$.

Notons que si ϕ est défini-positif ou défini-négatif, alors p est pair.

3.0.86 THÉORÈME (UNE CONDITION SUFFISANTE)
Soit un entier pair $p \geq 2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction p fois différentiables au point $a \in U$.
On suppose que $D^m f(a) = 0$ pour tout $1 \leq m < p$ et que $D^p f(a) \neq 0$.
On pose, pour tout $h \in E$, $\phi(h) = D^p f(a).h^p$.

(i) Si le polynôme p-homogène ϕ est défini positif, f présente un minimum local strict en a.

(ii) Si le polynôme p-homogène ϕ est défini négatif, f présente un maximum local strict en a.

(iii) Si le polynôme p-homogène ϕ est indéfini alors f ne présente pas d'extremum en a i.e. f a un point selle en a.

Démonstration: La formule de Taylor-Young à l'ordre p au point a, nous donne
$f(a+h) - f(a) = \dfrac{1}{p!} D^p f(a).h^p + \|h\|^p \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

(i) Si ϕ est défini positif, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que : $D^p f(a) h^p \geq \lambda \|h\|^p$ pour tout $h \in E$. D'autre part $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $\|h\| < \delta \Rightarrow |\varepsilon(h)| < \frac{\lambda}{2p!}$.
D'où $f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{p!}\lambda \|h\|^p + \|h\|^p \varepsilon(h) = (\frac{1}{p!}\lambda + \varepsilon(h))\|h\|^p > \frac{\lambda}{2p!}\|h\|^p$ pour $\|h\| < \delta$. Ce qui montre que $f(x) - f(a) > 0$ pour $x \neq a$ dans la boule $B(a, \delta)$.

(ii) On applique (i) à $-f$.

(iii) Par hypothèse il existe v et w in $E \setminus \{0\}$ tels que :
$D^p f(a).v^p < 0$ et $D^p f(a).w^p > 0$.
Pour t assez petit, la formule de Taylor-Young nous donne :
$f(a+tv) - f(a) = \dfrac{1}{p!} D^p f(a).v^p + t^p \|v\|^p \varepsilon(v)$
d'où $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t^p} = \frac{1}{2} D^2 f(a)(v,v) + \|v\|^2 \varepsilon(tv) > 0$
et $f(a+tw) - f(a) = \dfrac{1}{p!} D^p f(a).w^p + t^p \|w\|^p \varepsilon(w)$
d'où $\frac{f(a+tw)-f(a)}{t^p} = \frac{1}{p!} D^p f(a).w^p + \|w\|^p \varepsilon(tw) < 0$.
Ainsi $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a donc ne présente pas d'extremum en a. ■

3.0.88 REMARQUE. Si $\phi(h) = D^p f(a).h^p$ est semi-défini positif (resp. semi-défini négatif) le résultat précédent ne permet pas de conclure.

Exemples, pour $f(x,y) = x^4$, $\phi(h) = D^4 f(0,0).h^4 = x^4 \geq 0$ est semi-défini positif et $(0,0)$ est un minimum, alors que pour $g(x,y) = x^4 - y^6$, $\psi(h) = D^4 g(0,0).h^4 = x^4 \geq 0$ est semi-défini positif et $(0,0)$ est un point selle.

On a la condition nécéssaire suivante :

3.0.89 PROPOSITION
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, U ouvert d'un espace vectoriel normé E et $a \in U$ un point critique de f (c-à-d $Df(a) = 0$).

1. Si f présente un minimum local en a, alors la forme bilinéaire $D^2 f(a)$ est semi-définie positive.
2. Si f présente un maximum local en a alors la forme bilinéaire $D^2 f(a)$ est semi-définie négative.

Cas de la dimension finie :

3.0.90 THÉORÈME
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\phi : E \to \mathbb{R}$ un polynôme p-homogène (voir 2.0.51).
Alors, ϕ est **défini positif** si et seulement si $\forall h \in E - \{0\}$, $\phi(h) > 0$.
(resp. ϕ est **défini négatif** si et seulement si $\forall h \in E - \{0\}$, $\phi(h) > 0$).

Démonstration: On se limitera au cas où $\forall h \in E$, $\phi(h) > 0$. le cas $\phi(h) > 0$ s'obtient en changeant ϕ par $-\phi$.
Comme la dimension de E est finie, sa sphère unité $S := \{h \in E \,|\, \|h\| = 1\}$ est compacte. Alors, la restriction de ϕ à S atteint sa borne inférieure λ : il existe $h_0 \in S$ tel que $\phi(h_0) = \lambda$. On a $h_0 \neq 0$ d'où $\lambda = \phi(h_0) > 0$.

Ainsi, pour tout $h \in E - \{0\}$, alors $\phi(h) = \|h\|^p \phi\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq \lambda \|h\|^p$. ■

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

La forme bilinéaire bilinéaire $D^2 f(a)$ est réprésentée dans la base canonique par la matrice hessienne

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

la forme quadratique (i.e. le polynôme 2-homogène) $\phi(h) = D^2 f(a).h^2 = {}^t h H_f(a) h$. Comme $H_f(a)$ est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée. La conditions $D^2 f(a)$ définie positive (respectivement définie négative) est équivalente à $H_f(a)$ à toutes ses valeurs propres > 0 (respectivement $H_f(a)$ à toutes ses valeurs propres < 0)

3.0.92 Exercice Montrer cette équivalence

Le théoème 3.0.86 devient :

3.0.93 THÉORÈME

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$ un point critique de f (c-à-d $Df(a) = 0$). Alors

1. Cas $\det H_f(a) \neq 0$
   (a) Si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres > 0, f présente un minimum strict en a.
   (b) Si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres < 0, f présente un maximum strict en a.
   (c) Si $H_f(a)$ a au moins une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0, f ne présente pas d'extrémum en a.
2. Cas $\det H_f(a) = 0$
   (a) Si $H_f(a)$ a au moins une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0, f ne présente pas d'extrémum en a.
   (b) Si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres ≥ 0, (resp. Si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres ≤ 0) la condition nécessaire est remplie, mais la condition suffisante ne l'est pas : on ne peut rien conclure a priori, il faut utiliser les différentielles d'ordre supérieur (si elles existent) pour étudier la nature de ce point.

3.0.94 REMARQUE. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A a toutes ses valeurs propres strictement positives
   (resp. A a toutes ses valeurs popres strictement négatives)
2. La forme quadratique $x \to \langle x, Ax\rangle$ est définie positive
   (resp. La forme quadratique $x \to \langle x, Ax\rangle$ est définie négative)
3. Tous les mineurs principaus de A sont strictement positives c-à-d pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\det A_{ii} > 0$

   (resp. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(-1)^i \det A_{ii} > 0$) où $A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$

3.0.95 REMARQUE.

1. Les conditions du théorème sont seulement suffisantes. En effet, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4$ présente au point critique $a = (0,0,0)$ un minimum strict (global) mais la matrice $H_f(a)$ n'est même pas définie en ce point ($\det H_f(a) = 0$).
2. Il se peut qu'une fonction présente en un point un minimum en restriction à toute droite passant par ce point, bien qu'elle ne présente pas de minimum en ce point :
   Par exemple, pour $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ on a le long de toute droite vectoriel $ax + by = 0$, $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ dans un certain voisinage de $(0,0)$ (qui dépend de a et b), mais le long de la parabole $y = 2x^2$, $f(x, 2x^2) = -x^4 \leq 0$, donc $(0,0)$ n'est pâs un extremum.

Cas particulier $n = 2$

pour $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$ deux fois différentiable en (a,b), On suppose que (a,b) est un point critique i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

on utilise la notation $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$.
la discussion du théorème 3.0.93 se traduit par :

3.0.96 COROLLAIRE

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f présente un minimum strict en (a,b).
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f présente un maximum strict en (a,b).
3. Si $rt - s^2 < 0$ f n'a pas d'extremum (a un point selle) en (a,b).

3.0.97 EXEMPLE. On se propose de déterminer les extréma de $f(x,y) = xye^{(x^2+y^2)}$.

1. Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1+2x^2)e^{(x^2+y^2)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1+2y^2)e^{(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$

   l'unique solution est $x = y = 0$.

2. Le calcul des dérivées secondes donne $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2xy(3+2x^2)e^{(x^2+y^2)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+2x^2)(1+2y^2)e^{(x^2+y^2)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2xy(3+2y^2)e^{(x^2+y^2)}. \end{cases}$

   Au point $(x,y) = (0,0)$, la matrice hessiene $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\det H_f(0,0) = -1$, $H_f(0,0)$ a des valeurs propres non nulles et de signes opposés. Le point $(0,0)$ est un point selle.

3. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x,1) = \lim_{x\to+\infty} xe^{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x,1) = \lim_{x\to-\infty} xe^{x^2} = -\infty$ donc f admet des valeurs arbitrairement grandes (vers $+\infty$) et arbitrairement petites (vers $-\infty$). Elle n'admet donc ni maximum ni minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3.0.98 REMARQUE. Pour une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ où A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le critère précédent ne permet de détecter que les extréma locaux de l'intérieur de A, mais f pourrait avoir des extrema sur la frontière $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Dans le chapitre suivant, on va traiter par "la méthode des multiplicateurs de lagrange" ce type de problème.

3.0.99 Exercice Déterminer les extrema de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur la boule fermée $\bar{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.