1.8 Le théorème des accroissements finis

Rappelons le résultat classique pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.8.1 THÉORÈME (THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS SUR $\mathbb{R}$)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$.

Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

(où il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

Une autre version (plus faible) de ce résultat est l'inégalité des accroissements finis :

1.8.2 THÉORÈME (L'INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$. Soit $M \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x \in [a,b]$, alors $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$ pour tout $x, y \in [a,b]$.

On en déduit une première extension du théorème des accroissements finis pour les fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.8.3 DÉFINITION
1) Soit E un espace vectoriel, $a, b \in E$. Le segment $[a,b]$ est le sous-ensemble de E défini par

$$[a,b] = \{x \in E; \text{ il existe } t \in [0,1] \text{ tel que } x = a + t(b-a)\}$$

2) Un sous-ensemble $U \subset E$ est dit **convexe** si pour tout $a, b \in U$ le segment $[a,b] \subset U$.

1.8.4 THÉORÈME (THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS À VALEURS DANS $\mathbb{R}$)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable dans l'ouvert $U \subset E$. Soit $a, b \in U$, si le segment $[a,b]$ est contenu dans U, il existe $\theta \in]0,1[$ telle que

$$\boxed{f(b) - f(a) = Df(a + \theta(b-a)).(b-a)}$$

ce qui est équivalent à dire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = Df(c).(b-a)$.

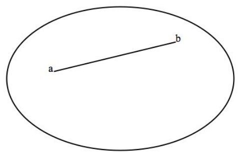

FIGURE 1.1 – convexe

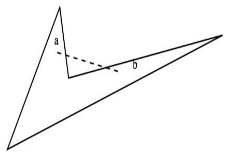

FIGURE 1.2 – non convexe

Démonstration: On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(a + t(b-a))$. Alors, $g = f \circ A$ où $A : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est l'application définie par $A(t) = a + t(b-a)$.
g est différentiable sur $[0,1]$, comme composée de fonctions différentiables et

$$g'(t) = Df(A(t))(DA(t)) = Df(a + t(b-a)).(b-a)$$

Il existe donc $\theta \in]0,1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$,
qui se traduit par : il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(b) - f(a) = Df(a + \theta(b-a)).(b-a).$$

1.8.6 REMARQUE. L'exemple suivant montre que ce résultat est faux si f est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension ≥ 2.

1.8.7 EXEMPLE. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto f(x) = (x^2, x^3)$. Sa différentielle au point x est $Df(x) = (2x, 3x^2)$. D'autre part, $f(1) - f(0) = (1,1)$ et pour tout $c \in \mathbb{R}$, $Df(c) = (2c, 3c^2) \neq (1,1)$ on montre ainsi, le théorème précédent ne s'applique pas à f.

On a néanmoins, le corollaire suivant : si on n'impose pas aux différentielles des composantes de f soient évaluées en un même point c :

1.8.8 COROLLAIRE
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ une fonction différentiable. Soit $a, b \in U$, si le segment $[a,b]$ est contenu dans U, il existe m points $c_1, \ldots, c_m \in]a,b[$ telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ on a

$$f_j(b) - f_j(a) = Df(c_j).(b-a)$$

Démonstration: On applique 1.8.4 à chaque composante f_j de f.

Une autre variante du théorème des accroissement finis où l'égalité est remplacée par une inégalité sur les normes.

1.8.10 THÉORÈME (L'INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable. U ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[a, b] \subset U$, on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} \|Df(x)\| \right) . \|b - a\|$$

Démonstration: On suppose $f(b) - f(a) \neq 0$, sinon l'inégalité est évidente. On pose $v = \frac{f(b)-f(a)}{\|f(b)-f(a)\|}$. On considére la forme linéaire continue ψ , définie par : pour tout $y \in F$, $\psi(y) =< y, v >$ où $< ., . >$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^m$.

D'après 1.8.4, il existe $\theta \in]0, 1[$ telle que $\psi\,(f(b) - f(a)) = \psi\,(f(b)) - \psi\,(f(a)) = D\psi \circ f(a + \theta(b - a)).(b - a) = \psi\left(Df(a + \theta_\psi(b - a))(b - a)\right)$ s'écrit aussi
$< f(b) - f(a), v >=< Df(a + \theta(b - a))(b - a), v >$ ou encore

$$\|f(b) - f(a)\| =< Df(a + \theta(b - a))(b - a), v >$$

et une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :
$| < Df(a+\theta_(b-a))(b-a), v > | \leq \|Df(a+\theta(b-a))(b-a)\|\|v\| \leq \|Df(a+\theta(b-a))(b-a)\|$
d'où $\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(a + \theta(b - a))(b - a)\| \leq \|Df(a + \theta(b - a))\|\|(b - a)\|$,
finalement $\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x\in]a,b[} \|Df(x)\|\right) .\|(b - a)\|$ ■

1.8.12 LEMME
Soit $g : [0, 1] \to F$ une application différentiable telle que il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in]0, 1[$ on ait $\|Dg(t)\| \leq M$. Alors $\|g(1) - g(0)\| \leq M$.

Démonstration: Soit $\epsilon > 0$ fixé.

on pose $S_\epsilon = \{t \in [0, 1] \,|\, \forall s \in [0, t],\ \|g(s) - g(0)\| \leq (M + \epsilon).s\}$. Comme S_ϵ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure, qu'on notera t_0.

On veut montrer que $t_0 = 1$.

Si $t_0 < 1$, alors par définition de la borne supérieure, il existe une suite $h_n > 0$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ et $\|g(t_0 + h_n) - g(0)\| > (M + \epsilon).(t_0 + h_n)$. D'où par continuité de g et passage à la limite, on aura $\|g(t_0) - g(0)\| \geq (M + \epsilon).t_0$. Alors
$\|g(t_0 + h_n) - g(t_0)\| \geq \|g(t_0 + h_n) - g(0)\| - \|g(t_0) - g(0)\| > (M + \epsilon).(t_0 + h_n) - (M + \epsilon).t_0 = (M + \epsilon).h_n$ ainsi $\|\frac{g(t_0+h_n)-g(t_0)}{h_n}\| > M + \epsilon$ et par passage à la limite on obtient $\|Dg(t_0)\| \geq M + \epsilon > M$, ceci contredit l'hypothèse $\|Dg(t)\| \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Donc $t_0 = 1$. Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, $\|g(1) - g(0)\| \leq (M + \epsilon)$ ce qui signifie $\|g(1) - g(0)\| \leq M$.

1.8.14 THÉORÈME (L'INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS (CAS GÉNÉRAL))
Soient E et F deux evn et $f : U \to F$ une application différentiable. U ouvert de E.

Soient $x, y \in U$ tels que le segment $[x, y] \subset U$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ telle que $\|Df(x + t(y - x))\| \leq M$ pour tout $t \in]0, 1[$, alors

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|x - y\| \tag{1.3}$$

Démonstration: Soient $x, y \in U$ tels que le segment $[x, y] \subset U$. On définit $g : [0, 1] \to F$, $t \mapsto g(t) = f(x + t(y - x))$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on aura $Dg(t) = Df(x + t(y - x)).(y - x)$ et par suite $\|Dg(t)\| \leq \|Df(x + t(y - x))\|.\|y - x\| \leq M.\|y - x\|$.

On applique le lemme précédent à g pour obtenir le résultat

$$\|f(y) - f(x)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq M\|y - x\|$$

1.8.1 Quelques applications du théorème des accroissements finis

1.8.16 COROLLAIRE
Soient E et F deux evn. $f : U \to F$ une application différentiable. U ouvert de E.

Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $a, b \in E$ tels que le segment $[a, b] \subset U$, on a :

$$\|f(b) - f(a) - T(b - a)\| \leq \|b - a\| \left(\sup_{x \in]a,b[} \|Df(x) - T\| \right). \tag{1.4}$$

En particulier, si $T = Df(a)$ on aura

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b - a)\| \leq \|b - a\| \left(\sup_{x \in]a,b[} \|Df(x) - Df(a)\| \right). \tag{1.5}$$

Démonstration: Résulte de l'inégalité des accroissement finis appliquée à $f - T$ et de la linéarité de T qui entraîne $DT(x) = T$. ∎

Soient $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ et F des espaces vectoriels normés , $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application.

On a vu précédemment que si f est différentiable en tout point $a \in U$, alors $Df(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a))$ et chaque composante $D_i f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, mais que la réciproque est en générale fausse.

Le résultat suivant donne le lien entre continuité des dérivées partielles et continuité de la différentielle.

1.8.18 THÉORÈME
Soient $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ et F des espaces vectoriels normés , $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application.

Alors f est de classe C^1 si et seulement si pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $D_j f$ existe et est continue.

Démonstration: " $\Longrightarrow$ " Si Df est continue il en est de même de ses composantes $D_i f$, donc les dérivées partielles sont continues.

" $\Longleftarrow$ " Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $D_j f$ existe et est continue.

Pour alléger les notatiosn on prendra $n = 2$, la même technique marche pour $n \geq 3$.

Soit $a = (a_1, a_2) \in U$ et $(h_1, h_2) \in E = E_1 \times E_2$, on écrit

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|h_1\| < \delta$ et $\|h_2\| < \delta$ on a

$$\|D_1 f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - D_1 f(a_1, a_2)\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|D_2 f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| < \varepsilon.$$

D'après le corollaire 1.8.16, on a

$$\begin{aligned} &\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - D_2 f(a_1, a_2) h_2\| \\ &\leq \|h_2\| \sup_{s \in]a_2, a_2 + h_2[} \|D_2 f(a_1 + h_1, s) - D_2 f(a_1, a_2)\|. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\|f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2) h_1\| \\ &\leq \|h_1\| \sup_{t \in]a_1, a_1 + h_1[} \|D_1 f(t, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\|f(a+h) - f(a) - (D_1 f(a), D_2 f(a)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \| \leq \varepsilon(\|h_1\| + \|h_1\|)$$

Ainsi f est différentiable et de différentielle $Df(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a))$, comme $D_1 f$ et $D_2 f$ sont continues, il en est de même de Df.■

1.8.20 DÉFINITION (APPLICATION LIPSCHITZIENNE)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $K \geq 0$.

Une application $f : U \to F$ est dite K-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport K) si pour tout $x, y \in U$ on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

1.8.21 COROLLAIRE
Soient E et F deux des espaces vectoriels normés, U ouvert **convexe** de E.

Soit $f : U \to F$ une application différentiable, on suppose qu'il existe $K \geq 0$ tel que $\|Df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in U$. Alors f est K-lipschitzienne .

1.8.22 REMARQUE. Dans le résultat précédent l'hypothèse de convexité est essentielle. L'exemple suivant montre que le résultat n'est pas nécessairement vrai même si on suppose que U est connexe.
En effet, si $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ une demi-couronne ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ définie par : $(x, y) \mapsto f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$.
Alors $Df(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Si on munit $\mathbb{R}^2$, de la norme $\|.\|_2$, on aura $\|Df(x, y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$.
Mais, $\lim_{n\to+\infty} |f(\frac{1}{n}, 1) - f(\frac{1}{n}, -1)| = \pi$ et $\|(\frac{1}{n}, 1) - (\frac{1}{n}, -1)\| = 2$, montre que f n'est pas 1-lipschitzienne dans l'ouvert connexe U bien que $\sup_{(x,y)\in U} \|Df(x, y)\| \leq 1$.

1.8.23 DÉFINITION

1) Soit $U \subset E$ un ouvert. Une application $f : U \to F$ est dite localement constante si pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et $f(x) = f(a)$, pour tout $x \in B(a, r)$.
2) Un ouvert $U \subset E$ est dit **connexe** si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux ouverts non vides et disjoints i.e.
   si $U = U_1 \cup U_2$ avec U_1 et U_2 ouverts tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ alors nécessairement $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$.

1.8.24 Exercice Montrer que si U est un ouvert , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. U est connexe
2. Toute fonction $f : U \to F$ localement constante est nécessairement constante.

Indication : Soit $a \in U$, montrer que $A_a := \{x \in U \mid f(x) = f(a)\}$ est un ouvert et un fermé non vide de U.

1.8.25 Exercice Montrer que tout ouvert convexe est connexe.

Donner un exemple d'ouvert connexe qui ne soit pas convexe.

1.8.26 REMARQUE. La connexité de U est essentielle. En effet $f:]0,1[\cup]2,3[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\in]0,1[$ et $f(x)=1$ si $x\in]2,3[$, est localement constante mais n'est pas constante.

1.8.27 COROLLAIRE
Soient E et F deux evn, U ouvert **connexe** de E.

Soit $f: U\to F$ une application différentiable telle que $Df(x)=0$ pour tout $x\in U$. Alors f est constante.

Démonstration: Soit $a\in U$. Il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\subset U$. d'après le corollaire précédent, appliqué au convexe $B(a,r)$, on a $\|f(x)-f(a)\|=0$ pour tout $x\in B(a,r)$. Donc la restriction de f à toute boule contenue dans U est constante autrement dit f est localement constante dans U.

Comme U est un ouvert connexe, f y est alors constante, d'après l'exercice précédent. ∎