Chapitre 3

Théorème des résidus et applications

3.1 Développement en série de Laurent

Soit $r, R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, 0 \leq r < R$.
L'ouvert $C(a;r;R) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z-a| < R\}$ est appelé couronne de centre a, de rayon intérieur r et de rayon extérieur R. Puisque $C(a;r;R)$ n'est pas un domaine simplement connexe, la formule de Cauchy n'est pas valable pour tout lacet Γ de Ω. En particulier elle n'est pas valable pour le lacet $\Gamma = C(a;s)$, le cercle de centre a et de rayon s, avec $r < s < R$.

3.1.1 PROPOSITION
Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $C(a;r;R)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les intégrales

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(a;s)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

ne dépendent pas de s, $(r < s < R)$.

Démonstration: Soit $r < s < s' < R$. Soit β un segment qui relie $C(a;s)$ à $C(a;s')$. Alors, le lacet $\Gamma = C(a;s') \vee \beta \vee -C(a;s) \vee -\beta$, a un indice nul en z_0 i.e. $Ind_\Gamma(z_0) = 0$. On applique alors le théorème de Cauchy-Goursat au lacet Γ et à la fonction $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ holomorphe dans $C(a;r;R)$. ■

3.1.3 THÉORÈME
Toute fonction holomorphe dans une couronne $C(a;r;R)$ est développable en série de la forme $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ dite **série de Laurent**, qui converge normalement sur tout compact $K \subset C(a;r;R)$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in]r, R[$ on a, $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \, d\xi$.

3.1.4 REMARQUE
Le développement en série de Laurent est unique.

Démonstration: Fixons $z \in C(a;r;R)$ et s, s' tels que $r < s < |z-a| < s' < R$. Soit β un segment qui relie $C(a;s)$ à $C(a;s')$. On définit le lacet $\Gamma := C(a;s') \vee \beta \vee -C(a;s) \vee -\beta$. Comme l'indice de z par rapport à Γ est égal à 1, la formule de Cauchy nous donne $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s')} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi$. En écrivant $\dfrac{1}{(\xi-z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ (avec convergence normale dans $C(a;s')$), et $\dfrac{1}{(\xi-z)} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ (convergence normale dans $C(a;s)$). On a ainsi

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s')} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi + \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s)} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}d\xi$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s')} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s)} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

d'où le résultat. ∎

3.1.6 DÉFINITION
Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f dans la couronne $C(a;r;R)$.

$\displaystyle\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ est la partie **principale** du développement et

$\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ sa partie **régulière**.

3.1.7 EXEMPLE. (1) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Soit a un point de $\mathcal{H}^+\{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Im}(z) > 0\}$, alors $|a-i| < |a+i|$. On pose $r = |a-i|$ et $R = |a+i|$. f est holomorphe dans la couronne $C(a;r;R)$ et donc y admet un développement en série de Laurent, que nous allons déterminer.

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}.$$

Si $|z-a| > r$, on a $\dfrac{1}{z-i} = \dfrac{1}{z-a}\dfrac{1}{1-\frac{i-a}{z-a}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(i-a)^{n+1}}$.

Si $|z-a| < r$, on a $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i+a}\frac{1}{1-\frac{a-z}{i+a}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-z)^n}{(i+a)^{n+1}}$

D'où pour tout $z \in C(a;r;R)$, $f(z) = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{(z-a)^n}{(i-a)^{n+1}} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-z)^n}{(i+a)^{n+1}}$

La partie principale est $\frac{1}{2i}\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{(z-a)^n}{(i-a)^{n+1}}$ et la partie régulière est $-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-z)^n}{(i+a)^{n+1}}$.
En particulier si $a=i$ et $C(a;r;R)=C(i;0;2)$,
$f(z)=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-z)^n}{(2i)^{n+1}}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}$.

(2) $f(z)=exp(\frac{1}{z})$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}=C(0;0;+\infty)$. Le développement en série de Laurent de $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{-\infty}^{-1}\frac{z^n}{(-n)!}$ sa partie régulière est 1 et sa partie principale est $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{z^n}{(-n)!}$.

3.1.8 COROLLAIRE

Pour toute fonction f holomorphe dans la couronne $C(a;r;R)$, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s)}f(z)\,dz$ pour tout $r<s<R$, est égale au coefficient a_{-1} du terme $\frac{1}{z-a}$ du développement en série de Laurent de f.

3.1.9 COROLLAIRE (INÉGALITÉS DE CAUCHY)

Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C(a;r;R)$. Alors, $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $s\in]r,R[$:

$$|a_n|\leq\frac{M_f(s)}{s^n}$$

où $M_f(s)=\max_{|z-a|=s}|f(z)|$.

Démonstration: Comme $a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s)}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+se^{i\theta})}{s^{n+1}}e^{-in\theta}\,d\theta$.
d'où $|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{\max_{|z-a|=s}|f(z)|}{s^{n+1}}\lambda(C(a;s))=\frac{1}{2\pi}\frac{M_f(s)}{s^{n+1}}.2\pi s=\frac{M_f(s)}{s^n}$. ■

3.1.11 COROLLAIRE (THÉORÈME DE PROLONGEMENT DE RIEMANN)

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω sauf peut être en un point $z_0\in\Omega$ telle que

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}(z-z_0)f(z)=0.$$

Alors f admet un prolongement (unique) en une fonction holomorphe sur Ω.

Démonstration: Comme, Ω est ouvert il existe un disque $D(z_0; R) \subset \Omega$, f étant holomorphe dans la couronne $C(z_0; 0; R) = D(z_0; R) - \{z_0\}$ elle y admet un développement en série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Les inégalités de Cauchy nous donnent, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in]0, R[$

$$|a_n| \leq \frac{\max_{|z-z_0|=s} |f(z)|}{s^n} = \frac{\max_{|z-z_0|=s} |sf(z)|}{s^{n+1}}.$$

Comme par hypothèse $\lim_{z \longrightarrow z_0} \max_{|z-z_0|=s} |sf(z)| = 0$, on a pour tout $n \leq -1$, $a_n = 0$.

Par conséquent $f(z)$ se réduit à une série entière $\sum_0^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, et le prolongement holomorphe dans Ω, $\tilde{f}$ de f, s'obtient en posant

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} a_0 & \text{si } z = z_0 \\ f(z) & \text{si } z \neq z_0 \end{cases}$$

■

3.1.1 Singularités isolées

3.1.13 DÉFINITION

On dit qu'une fonction f a une **singularité isolée** en un point z_0 s'il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe dans le disque épointé $D^*(z_0; r) = D(z_0; r) - \{z_0\}$.

Comme $D^*(z_0; r)$ est une couronne, $f(z)$ y admet un développement en série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

3.1.14 DÉFINITION

. Soit $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f dans la couronne $D^*(z_0; r)$.

$f_-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ est appelée **partie principale** et

$f_+(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ est appelée **parie régulière** du développement de f en z_0.

On va maintenant classifier les singularités isolées. Il y a 3 types de singularités :

(1) Singularité superficielle (ou singularité apparente)

f a une singularité apparente en z_0 si pour tout $n < 0$, les coefficients $a_n = 0$ (i.e. sa partie principale est nulle.)

Dans ce cas f admet un prolongement holomorphe au disque $D(z_0; r)$ (Théorème de prolongement de Riemann.)

(2) Pôle d'ordre m
f a un pôle d'ordre $m > 1$ en z_0 si pour tout $n < -m$, les coefficients $a_n = 0$ et $a_{-m} \neq 0$. Dans ce cas $f(z) = \sum_{-m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. On dit aussi que f est méromorphe en z_0.
(3) Singularité essentielle
f a une singularité essentielle en z_0 si pour une infinité de $n < 0$, les coefficients $a_n \neq 0$.

3.1.15 EXEMPLE. (1) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ a deux singularités isolées i et $-i$. On a vu que dans le disque épointé $D^*(i;2) = C(i;0;2)$, $f(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}$. Donc f a un pôle d'ordre 1 en i. De même f a un pôle d'ordre 1 en $-i$. (pour voir cela développer f en série de Laurent dans $D^*(-i;2) = C(-i;0;2)$.)
(2) $f(z) = exp(\frac{1}{z})$ a une singularité isolée en $z = 0$. On a vu que dans $\mathbb{C} \setminus \{0\} = C(0;0;+\infty) = D^*(0;+\infty)$, le développement en série de Laurent de $f(z) = 1 + \sum_{-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!}$ d'où $a_n = \frac{1}{(-n)!} \neq 0$ pour tout $n < 0$, et donc f a une singularié essentielle en $z = 0$.

3.1.16 Exercice Montrer que

(i) f à une singularité apparente en z_0 si et seulement si $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z)$ existe.

(ii) f à un pôle en z_0 si et seulement si $\lim_{z \longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ existe.

(iii) f à une singularité essentielle en z_0 si et seulement si $\lim_{z \longrightarrow z_0} |f(z)|$ n'existe pas.

3.1.2 Calcul pratique des résidus

3.1.17 DÉFINITION
On appelle **résidu** de f au point z_0, noté $Res(f, z_0)$, le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f dans un disque épointé $D^*(z_0;r)$.

Soit Ω un domaine et $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ tels que g et h sont holomorphes dans Ω et h non identiquement nulle. Alors les zéros de h sont isolés dans Ω. Comme chaque zéro a de h est de multiplicité finie, f est méromorphe en ce point. On va calculer le résidus de f au point a, distinguons deux cas :
(1) $\boxed{a \text{ est un pôle simple}}$ i.e. d'ordre 1. Si a est un pôle simple, on a dans un disque épointé $D^*(a,r)$, $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_0^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Alors $(z - a)f(z) = a_{-1} + \sum_0^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n+1}$ et donc $\lim\limits_{z \longrightarrow a}(z - a)f(z) = a_{-1} = Res(f, a)$.

Dans le cas $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ et $h'(a) \neq 0$ on a

$\lim\limits_{z \longrightarrow a}(z - a)\dfrac{g(z)}{h(z)} = \lim\limits_{z \longrightarrow a} g(z)\dfrac{z - a}{h(z)} = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$. D'où $\boxed{Res\left(\frac{g}{h}, a\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}}$.

(2) $\boxed{a \text{ est un pôle d'ordre } m \geq 2}$. Si a est un pôle d'ordre $m \geq 2$, on a dans un disque épointé $D^*(a,r)$,$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_0^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Alors, $(z-a)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_0^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}$ et d'où

$$\boxed{Res(f,a) = a_{-1} = \lim_{z \longrightarrow a} \left[\frac{(z-a)^m f(z)}{(m-1)!} \right]^{(m-1)}}$$

3.2 Théorème des résidus

3.2.1 Proposition

Soit f une fonction holomorphe dans $D^*(z_0; R)$.

Alors pour tout lacet γ contenu dans $D^*(z_0; R)$, on a

$$\boxed{\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = Res(f, z_0) Ind_\gamma(z_0)} \tag{3.1}$$

Démonstration: Comme f est holomorphe dans la couronne $C(z_0; 0; R) = D^*(z_0; R)$ elle y admet un développement en série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, qui converge uniformément sur tout compact $K \subset D^*(z_0; R)$, d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \Big(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z-z_0)^n\, dz \Big).$$

D'autre part, $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ Ind_\gamma(z_0) & \text{si } n = -1 \end{cases}$

Ainsi $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = a_{-1} Ind_\gamma(z_0) = Res(f, z_0) Ind_\gamma(z_0)$. ■

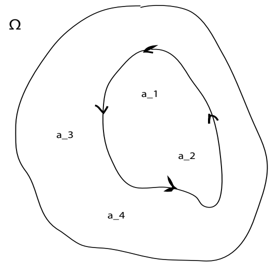
3.2.3 Théorème (Le théorème des résidus)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit A un sous-ensemble discret de Ω et γ un lacet contenu dans $\Omega \setminus A$ tel que $Int(\gamma) \subset \Omega$.

Alors pour toute fonction f holomorphe sur $\Omega \setminus A$, on a la formule des résidus suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{a \in A} Res(f, a) Ind_\gamma(a). \tag{3.2}$$

Démonstration: Soit $B = \{a \in A; Ind_\gamma(a) \neq 0\}$. B est alors contenu dans le complémentaire W de la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, qui est compact.
Montrons que B est fini.
Sinon, il existe une suite $\{a_n\}$ de points de B, deux à deux disjoints, qui converge vers un point $a \in W$. Comme B est discret dans Ω, $a \notin \Omega$, et par suite $a \notin \gamma^*$, par conséquent l'indice de a par rapport à γ est bien défini et $Ind_\gamma(a) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} Ind_\gamma(a_n)$, par continuité de la fonction indice. D'où $Ind_\gamma(a) \neq 0$, mais ceci contredit l'hypothèse $Int(\gamma)$ est contenu dans Ω. Donc la somme $\sum_{a \in A} Res(f, a) Ind_\gamma(a)$ se réduit à



la somme finie $\sum_{a\in B} Res(f,a)Ind_\gamma(a)$.
Notons $B=\{a_1,\dots,a_m\}$ et $n_i=Ind_\gamma(a_i)$.
En chaque $a_j\in B$, f admet un développement en série de Laurent $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^j(z-a_j)^n$ dans un disque $D(a_j,r_j)-\{a_j\}\subset\Omega\setminus\gamma^*\cup A$. On peut choisir les rayons r_j assez petit, pour que les disques $\overline{D(a_i,r_i)}$ soient disjoints.
On remarquera que chaque partie principale définit une fonction holomorphe P_j sur $\mathbb{C}-\{a_j\}$, $P_j(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a_{-n}^j}{(z-a_j)^n}$ et que $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma P_j(z)\,dz=Res(f,a_i)Ind_\gamma(a_i)$.
La fonction $g(z)=f(z)-\sum_{j=1}^m P_j(z)$ admet un prolongement en une fonction holomorphe sur Ω (en effet, en a_j, $f(z)-P_j(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^j(z-a_j)^n$ dans $D(a_j,r_j)$ et $\sum_{j'\neq j} P_{j'}$ est holomorphe sur $D(a_j,r_j)$) et comme $Int(\gamma)\subset\Omega$, le théorème de Cauchy-Goursat 2.2.1 nous donne :

$$0=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\,dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz-\sum_{i=1}^m\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma P_j(z)\,dz\right)$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz-\sum_{i=1}^m Res(f,a_i)Ind_\gamma(a_i)$$

■

3.2.1 Application au calcul intégral

Il s'agit de calculer une intégrale définie d'une fonction d'une variable réelle sans expliciter de primitive. L'idée est de trouver une fonction holomorphe convenable et un cycle convenable qui permettent de calculer l'intégrale cherchée. En pratique les cycles choisit sont des lacets simples i.e. divise le plan complexe en deux composantes connexes, une bornée d'indice 1 et l'autre non bornée d'indice 0. Dans ce cas la formule des résidus ne tient compte que des points intérieurs. La méthode de calcul des intégrales par la méthode des résidus utilise souvent l'idée de limite sur des cycles, et celle-ci est mise en évidence par les lemmes suivants (souvent attribués à C.Jordan).

3.2.5 LEMME (LEMME A)

1) Soit f une fonction continue sur l'ensemble

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z-a| < r, \alpha_1 \leq \arg(z-a) \leq \alpha_2\} \qquad a \in \mathbb{C}, r > 0, \alpha_1 < \alpha_2.$$

Soit γ_ρ l'arc de cercle de centre a de rayon ρ contenu dans S_1.
La condition $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow a \\ z \in S_1}} (z-a)f(z) = 0$ entraîne que $\lim\limits_{\rho \longrightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 0.$

2) Soit f une fonction continue sur l'ensemble

$$S_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| > R, \alpha_1 \leq \arg(z-a) \leq \alpha_2\} \qquad a \in \mathbb{C}, R > 0, \alpha_1 < \alpha_2.$$

Soit γ_ρ l'arc de cercle de centre a de rayon ρ contenu dans S_2. La condition $\lim\limits_{\substack{|z| \longrightarrow +\infty \\ z \in S_2}} (z-a)f(z) = 0$ entraîne que $\lim\limits_{\rho \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 0.$

Démonstration: Dans les deux cas la longueur de γ_ρ est égales à $(\alpha_2 - \alpha_2)\rho$. Alors $\left| \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz \right| \leq (\alpha_2 - \alpha_1)\rho \sup_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = (\alpha_2 - \alpha_1) \sup_{z \in \gamma_\rho} |(z-a)f(z)|$, et l'hypothèse assure le résultat. ■

3.2.7 LEMME (LEMME B)

Soit g une fonction continue dans le demi-plan supérieur $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$ tendant vers 0 lorsque $|z| \longrightarrow +\infty$ dans $\mathcal{H}^+$.
Soit C_ρ le demi-cercle de centre 0 et de rayon ρ contenu dans $\mathcal{H}^+$. Alors pour tout $\alpha > 0$ fixé, on a $\lim\limits_{\rho \longrightarrow +\infty} \int_{C_\rho} e^{i\alpha z} g(z)\, dz = 0$

Démonstration: Ceci va dépendre de l'inégalité suivante $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ On écrit $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. L'intégrale devient
$I_\rho = \int_{C_\rho} e^{i\alpha z} g(z)\, dz = \int_0^\pi e^{i\alpha\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} g(\rho e^{i\theta}) i\rho e^{i\theta}\, d\theta$. Soit M_ρ le maximum de $|g(z)|$ sur C_ρ, alors $|I_\rho| \leq \rho \int_0^\pi |g(\rho e^{i\theta})| e^{-\alpha\rho\sin(\theta)}\, d\theta \leq \rho M_\rho \int_0^\pi e^{-\alpha\rho\sin(\theta)}\, d\theta$
$\leq 2\rho M_\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\rho\sin(\theta)}\, d\theta \leq 2\rho M_\rho \frac{1-e^{-\alpha\rho}}{\alpha\rho\frac{2}{\pi}} \leq \frac{\pi}{\alpha} M_\rho$ On termine la preuve en utilisant l'hypothèse $\lim_{\rho \longrightarrow +\infty} M_\rho = 0$. ■

3.2.9 LEMME (LEMME C)

Soit a un pôle simple de la fonction f, γ_ρ un arc de cercle de centre a et de rayon ρ (orienté dans le sens positif), d'ouverture angulaire α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Alors $\lim\limits_{\rho \longrightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = i\alpha Res(f, a)$.

Démonstration: Comme a est un pôle simple, le développement de Laurent de f dans une couronnne $D^*(a,\epsilon)$ donne, $f(z) = \frac{Res(f,a)}{z-a} + g(z)$ et une constante $M > 0$ telle que $|g(z)| \leq M$ pour tout $z \in D^*(a,\epsilon)$. Alors $\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = Res(f,a) \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\gamma_\rho} g(z)\,dz$ Un calcul direct donne $\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-a}\,dz = i\alpha$ D'autre part $\left|\int_{\gamma_\rho} g(z)\,dz\right| \leq M\lambda(\gamma_\rho) = M\alpha\rho \longrightarrow 0$ lorsque $\rho \longrightarrow 0$.■

Intégrale de fractions rationnelles de fonctions trigonométriques

Soit $R = \frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$, telle que Q ne s'annule en aucun point du cercle unité $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$. On considère l'intégrale : $\boxed{I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt}$.
Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $z = e^{it}$ alors $dt = \frac{dz}{iz}$, $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ et $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Soit F la fraction rationnelle en z défine par

$$F(z) = R\Big(\frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)\Big)\frac{1}{iz}$$

Soit γ le cercle unité orienté dans le sens positif et A l'ensemble des pôles de F dans le disque unité, alors

$$I = \int_\gamma F(z)\,dz = 2i\pi \sum_{z\in A} Res(F,z) Ind_\gamma(z) = 2i\pi \sum_{z \in A\cap D(0;1)} Res(F,z)$$

3.2.11 Exemple. Soit à Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}\,dt$, avec $a > 1$.

Dans ce cas $R(x,y) = \frac{1}{a+x}$ et alors $F(z) = \frac{1}{i}\frac{1}{a+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}\frac{1}{z} = \frac{2}{z^2+2ia-1}$.

D'autre part $z^2 + 2aiz - 1 = (z - (-ia + i\sqrt{a^2-1}))(z - (-ia - i\sqrt{a^2-1}))$, d'où le seul pôle de F dans $D(0;1)$ est $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$.

Ce pôle est simple et le résidu en ce point se calcule par

$$Res(F, z_0) = \lim_{z\longrightarrow z_0} (z - z_0)F(z) = \frac{2}{2(-ia + i\sqrt{a^2-1}) + 2ia} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$$

D'où $I = 2i\pi \dfrac{1}{i\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Intégrale de fractions rationnelles d'une variable réelle

Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une continue telle que $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty} xf(x) = 0$; alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On veut alors calculer $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.}$

3.2.12 Exemple. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg Q \geq \deg P + 2$ et $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On suppose que la fonction f admet une extension holomorphe F à $\mathbb{C} \setminus A$ où A est un sous-ensemble fini disjoint de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et telle que $\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} zF(z) = 0$.

Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A. On pose $U_r = \{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Im}(z) \geq 0 \,\text{et}\, |z| \leq r\}$ et γ_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans U_r.

D'après le théorème des résidus appliqué à F et au lacet $[-r, r] \cup \gamma_r$ (orienté dans le sens positif), on a

$$\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} F(z)\,dz = \int_{\partial U_r} F(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a \in A \cap U_r} Res(F, a)$$

D'après le Lemme A, pour $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, on a $\lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} F(z)\,dz = 0$,

de plus $\lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)\,dx = I$ car f est intégrale sur $\mathbb{R}$, d'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2i\pi \sum \{\text{les résidus de } F \text{ dans le demi-plan supérieur}\}$$

3.2.13 EXEMPLE. Soit à calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Dans ce cas $F(z) = \frac{1}{z^4+1}$ est une extension de f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\}$ et $\lim\limits_{|z| \longrightarrow +\infty} zF(z) = 0$.

Les pôles de F sont simples et seulement $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ sont dans le demi-plan supérieur. D'où $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2i\pi\big(Res(\frac{1}{z^4+1}, e^{\frac{i\pi}{4}}) + Res(\frac{1}{z^4+1}, e^{\frac{3i\pi}{4}})\big)$
$= 2i\pi\big(-\frac{1}{4}e^{\frac{i\pi}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{3i\pi}{4}}\big) = 2i\pi(-\frac{i}{2\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Intégrales de fonctions ayant e^{ix} en facteur

I) Soit f une fonction de la variable réelle x admettant une extension holomorphe F à $\Omega \setminus A$, où Ω est un voisinage ouvert du demi-plan supérieur $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$ et A un ensemble fini disjoint de $\mathbb{R}$ telle que

$\lim\limits_{|z| \longrightarrow +\infty} F(z) = 0$. Soit $\alpha > 0$ un réel fixé. On veut calculer $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx}$.

Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A. On pose $U_r = \{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Im}(z) \geq 0 \,\text{et}\, |z| \leq r\}$ et γ_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans U_r.

Le théorème des résidus appliqué à $F(z)e^{i\alpha z}$ et au lacet $[-r, r] \cup \gamma_r$ (orienté dans le sens positif), nous donne

$$\int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_{\partial U_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2i\pi \sum_{a \in A \cap U_r} Res(Fe^{i\alpha z}, a)$$

D'après le Lemme B, $\lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$, d'où

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2i\pi\sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur}\}$$

Si de plus $f(x)e^{i\alpha x}$ est intégrable on a :

$$I = \lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2i\pi\sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur}\}$$

3.2.14 REMARQUE
Si $\alpha < 0$ on obtient en prenant les résidus dans le demi-plan inférieur $\mathcal{H}^- = \{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Im}(z) \le 0\}$.

$$I = \lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = -2i\pi\sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan inférieur}\}$$

3.2.15 EXEMPLE. Soit à calculer pour $b > 0$, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx$.

Comme $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+b^2}$ est une fonction paire on a $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx\Big)$.
Le seul pôle de $F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$ dans $\mathcal{H}^+$ est ib et ce pôle est simple, d'où

$$I = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(2i\pi Res(\frac{e^{ix}}{x^2+b^2}, ib)\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(2i\pi\frac{e^{-b}}{2ib}\right) = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$

II) On examine maintenant le cas où $F(z)$ a des singularités sur l'axe des réels i.e. $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Soit $x_1 < \cdots < x_n$ les points singuliers de F dans $\mathbb{R}$. On suppose que les x_i sont des pôles simples. Dans ce cas il convient de modifier le chemin d'intégration afin de contourner les points x_i.

Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A. Soit γ_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans $\mathcal{H}^+$ et $\gamma_\epsilon(j)$ le demi-cercle de centre x_j et de rayon ϵ contenu dans $\mathcal{H}^+$.

D'après le théorème des résidus appliqué à $F(z)e^{i\alpha z}$ et au lacet
$\gamma_r \cup [-r, x_1-\epsilon] \cup \big(\cup_{j=1}^n \gamma_\epsilon(j)\big) \cup \big(\cup_{j=1}^{n-1}[x_j+\epsilon, x_{j+1}-\epsilon]\big) \cup \gamma_\epsilon(n) \cup [x_n+\epsilon, r]$ (orienté dans le sens positif), on a
$\int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{-r}^{x_1-\epsilon} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_\epsilon(j)} F(z)e^{i\alpha z}\,dz + \sum_{j=1}^{n-1}\int_{[x_j+\epsilon, x_{j+1}-\epsilon]} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$
$+ \int_{x_n+\epsilon}^r f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2i\pi\sum_{a\in A\cap\mathcal{H}^+} Res(Fe^{i\alpha z}, a)$

Le Lemme C nous donne $\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{\gamma_\epsilon(j)} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = -i\pi Res(F(z)e^{i\alpha z}, x_j)$, et le Lemme B, $\lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$, d'où

$$\lim_{\substack{r\longrightarrow+\infty\\ \epsilon\longrightarrow 0}}\int_{-r}^{x_1-\epsilon} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j+\epsilon}^{x_{j+1}-\epsilon} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{x_n+\epsilon}^{r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx =$$

$2i\pi\sum\{$ résidus de $F(z)e^{i\alpha z}$ dans le demi-plan supérieur ouvert$\} + i\pi\sum\{$ résidus de $F(z)e^{i\alpha z}$ dans $\mathbb{R}\}$

Si de plus $f(x)e^{i\alpha x}$ est intégrable on a :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2i\pi\sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur ouvert}\}$$
$$+\, i\pi\sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans } \mathbb{R}\}$$

3.2.16 EXEMPLE. Soit à calculer $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right]$
D'après ce qui précède

$$\frac{1}{2i}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right] = \frac{1}{2i}(i\pi Res(\frac{e^{iz}}{z},0)) = \frac{1}{2i}(i\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

et de l'intégrabilité de $\frac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $I = \frac{\pi}{2}$.

Intégrales de fonctions ayant $x^{-\alpha}$ en facteur, $\alpha \in]0,1[$

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus A$, A fini contenu dans de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, telle que $\lim_{|z|\longrightarrow+\infty} f(z) = 0$, alors $x^{-\alpha}f(x)$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

Il s'agit de calculer $\boxed{I = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}f(x)\,dx}$. On prend la détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ définie par

$$Ln(z) = Ln|z| + i\arg(z) \quad \text{avec} \quad 0 < \arg(z) < 2\pi.$$

Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A et $\epsilon > 0$ assez petit, tel que le disque fermé de centre 0 et de rayon ϵ ne rencontre pas A.

Soit $\gamma_r(\eta)$ l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r et d'ouverture angulaire $\eta \le \theta \le 2\pi - \eta$, $\gamma_\epsilon(\eta)$ l'arc de cercle de centre 0 et de rayon ϵ et d'ouverture angulaire $\eta \le \theta \le 2\pi - \eta$, $[re^{i\eta}, \epsilon e^{i\eta}]$ et $[\epsilon e^{i(2\pi-\eta)}, re^{i(2\pi-\eta)}]$ des segments. Soit $\Gamma(\epsilon,r,\eta)$ le lacet (orienté positivement) obtenu en joignant tous ces chemin. On choisit $\eta > 0$ assez petit pour que A soit à l'intérieur de $\Gamma(\epsilon,r,\eta)$.

D'après le théorème des résidus

$$\int_{\Gamma(\epsilon,r,\eta)} z^{-\alpha}f(z)\,dz = 2i\pi\sum\{\text{ résidus de } z^{-\alpha}f(z) \text{ dans } \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ \}$$

Soit $g(z) = z^{-\alpha}f(z)$. Comme $|zg(z)| = |z^{1-\alpha}f(z)| = |z|^{1-\alpha}|f(z)|$, $\alpha \in]0,1[$, $\lim_{|z|\longrightarrow+\infty} f(z) = 0$ et f holomorphe en 0 on alors $\lim_{\substack{|z|\longrightarrow+\infty \\ |z|\longrightarrow 0}} zg(z) = 0$ et d'après le Lemme A
$\lim_{\substack{\eta\longrightarrow 0\\ \epsilon\longrightarrow 0}} \int_{\gamma_\epsilon(\eta)} z^{-\alpha}f(z)\,dz = \lim_{\substack{\eta\longrightarrow 0\\ r\longrightarrow +\infty}} \int_{\gamma_r(\eta)} z^{-\alpha}f(z)\,dz = 0.$

D'autre part $\lim_{\substack{\eta\longrightarrow 0\\ \epsilon\longrightarrow 0\\ r\longrightarrow+\infty}} \int_{[re^{i\eta},\epsilon e^{i\eta}]} z^{-\alpha}f(z)\,dz = \int_{+\infty}^{0} x^{-\alpha}f(x)\,dx$ et

$$\lim_{\substack{\eta\longrightarrow 0\\ \epsilon\longrightarrow 0\\ r\longrightarrow+\infty}} \int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\eta)}, re^{i(2\pi-\eta)}]} z^{-\alpha}f(z)\,dz = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}e^{-2i\alpha\pi}f(x)\,dx$$

Alors, lorsque $\eta \longrightarrow 0$, $\epsilon \longrightarrow 0$ et $r \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{\substack{\eta\longrightarrow 0\\ \epsilon\longrightarrow 0\\ r\longrightarrow+\infty}} \int_{\Gamma(\epsilon,r,\eta)} z^{-\alpha}f(z)\,dz = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}f(x)\,dx - \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}e^{-2i\alpha\pi}f(x)\,dx$$

$= (1 - e^{-2i\alpha\pi})I = \dfrac{2i\sin(\alpha\pi)}{e^{i\alpha\pi}} I$. Finalement

$$I = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} f(x)\,dx = \frac{\pi e^{i\alpha\pi}}{\sin(\alpha\pi)} \sum \{ \text{ résidus de } z^{-\alpha} f(z) \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \}.$$

3.2.17 EXEMPLE. Montrons que pour $1 < a < 2$, $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sin(\frac{a\pi}{2})}$.
Les pôles de $\frac{z^{a-1}}{z^2+1}$ sont $\pm i$ et sont simples, alors
$Res(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}, i) = \frac{i^{a-1}}{2i}$ $\quad Res(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}, -i) = -\frac{(-i)^{a-1}}{2i}$ et leur somme est égale à

$$\frac{i^{a-1}}{2i} - \frac{(-i)^{a-1}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{(a-1)\frac{i\pi}{2}} - e^{(a-1)\frac{3i\pi}{2}}) = -\frac{1}{2}(e^{\frac{ai\pi}{2}} + e^{\frac{3ai\pi}{2}}) = -e^{ai\pi}\cos(\frac{a\pi}{2})$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi e^{-ai\pi}}{\sin(a\pi)} e^{ai\pi} \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \frac{\pi\cos(\frac{a\pi}{2})}{\sin(a\pi)} = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)}$.

Intégrale de fonctions ayant $Ln(x)$ en facteur

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus A$, A fini disjoint de $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} z f(z) = 0$, alors $f(x)Ln(x)$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$; Il s'agit de calculer

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} f(x)Ln(x)\,dx}$$

On prend la détermination sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ définie par $Ln(z) = Ln|z| + i\arg(z)$ avec $0 < \arg(z) < 2\pi$.

Le théorème des résidus appliqué à $f(z)\big(Ln(x)\big)^2$ et au lacet $\Gamma(\epsilon, r, \eta)$, nous donne lorsque $\eta \longrightarrow 0$, $\epsilon \longrightarrow 0$ et $r \longrightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} f(x)\big(Ln(x)\big)^2\,dx - \int_0^{+\infty} f(x)\big(Ln(x) + 2i\pi\big)^2\,dx \\
&= -4i\pi \int_0^{+\infty} f(x)Ln(x)\,dx - 4\pi^2\pi \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= 2i\pi \sum \{ \text{ residus de } f(z)\big(Ln(z)\big)^2 \}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Si l'on sait calculer $J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ la formule précédente fournit $I = \int_0^{+\infty} f(x)Ln(x)\,dx$.

Dans le cas où $f(x)$ est à valeurs réelles, par séparation des parties réelle et imaginaire dans la formule précédente on obtient I et J.

3.2.18 EXEMPLE. On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{Ln(x)}{(1+x)^2}\,dx$
La fonction $\frac{(Ln(z))^2}{(1+z)^2}$ a un pôle de multiplicité 2 en $z = -1$ d'où $Res(\frac{(Ln(z))^2}{(1+z)^2}, -1) = \lim_{z \longrightarrow -1} \big((1+z)^2 \frac{(Ln(z))^2}{(1+z)^2}\big)' = -2i\pi$. Ainsi $I = -\frac{1}{2}\mathfrak{Re}(-2i\pi) = 0$.