2.2.2 Conséquences du théorème de Cauchy-Goursat

Formule de Cauchy

2.2.8 THÉORÈME (FORMULE DE CAUCHY)
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ un lacet tel que $Int(\gamma) \subset \Omega$. Soit z_0 un point de $\Omega \setminus \gamma^*$. Alors,

$$\boxed{Ind_\gamma(z_0).f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz}$$

Le théorème dit que les valeurs de f à l'intérieur de γ sont complètement déterminées par ses valeurs sur son image γ^*.

Démonstration: Soit γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r (orienté dans le sens positif i.e. $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, r est choisit assez petit pour le disque $D(z_0, r)$ soit contenu dans $Int(\gamma)$. On va se ramener au cas où l'indice au point z_0 est nul. Sans perdre de généralité on peut supposer que $Ind_\gamma(z_0) > 0$. Soit β un chemin qui relie γ à γ_r

Alors, le lacet $\Gamma = \gamma \vee \beta \vee (-\gamma_r \vee \ldots \vee -\gamma_r) \vee -\beta$, où on prend $Ind_\gamma(z_0)$ fois le chemin $-\gamma_r$, a un indice nul en z_0 i.e. $Ind_\Gamma(z_0) = 0$.

Alors d'après le théorème de Cauchy-Goursat appliqué à la fonction holomorphe $g : \Omega - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ nous donne

$$0 = \int_\Gamma g(z)\,dz = \left(\int_\gamma + \int_\beta - \int_{\gamma_r} - \ldots - \int_{\gamma_r} - \int_\beta\right) g(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz - Ind_\gamma(z_0)\int_{\gamma_r} g(z)\,dz$$

d'où $\int_\gamma g(z)\,dz = Ind_\gamma(z_0)\int_{\gamma_r} g(z)\,dz$. D'autre part lorsque $r \longrightarrow 0$,
$\left|\int_{\gamma_r} g(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma_r}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|.2\pi r \longrightarrow |f'(z_0)|.0 = 0.$

Ainsi, $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ i.e. $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi.Ind_\gamma(z_0).f(z_0)$ ∎

Cette formule est extrêmement utile pour le calcul. Par exemple, on obtient immédiatement que $\int_{C^+(0,1)} \frac{e^z}{z}\,dz = 2i\pi e^0 = 2i\pi$.

La formule de Cauchy est souvent utilisée dans le cas particulier où le lacet γ est un cercle et z_0 est un point du disque ouvert bordé par γ.

2.2.10 COROLLAIRE
Soit $D = D(a; R)$ un disque ouvert et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout $0 < r < R$ et pour tout $z \in D(a, r)$ on a :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+(a;r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\,d\xi} \qquad (2.19)$$

Le cercle $C^+(a;r)$ est orienté dans le sens positif et est paramétré par $\gamma : [0,1] \longrightarrow D(a;r), t \mapsto a + re^{2i\pi t}$.

Démonstration: Soit $0 < r < \rho$ et $z \in D(a,r)$, d'après la formule de Cauchy on a $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2i\pi . Ind_\gamma(z).f(z)$

Comme z et a appartiennent à la même composante de $D \setminus C(a;r)$ on a $Ind_\gamma(z) = Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(\xi - a)} d\xi = 1$.

■

Équivalences entre holomorphes et analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \Omega$, on désigne par $\delta(a)$ la distance de a au complémentaire de Ω.

Alors $\delta(a) = \sup\{r > 0 \,|\, D(a,r) \subset \Omega\}$. Le disque $D(a;\delta(a))$ est le plus grand disque centré en a et contenu dans Ω. On remarquera que si $\Omega = \mathbb{C}$ alors $\delta(a) = +\infty$. On a déja montré qu'une fonction analytique est holomorphe (voir Corollaire 1.1.26), on va maintenant montrer à l'aide de la formule de Cauchy que la réciproque est vraie, ainsi une fonction est holomorphe si et seulement si elle est analytique.

2.2.12 THÉORÈME

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω. Alors f est analytique sur Ω.

Plus précisément, pour tout $a \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ pour tout $z \in D(a, \delta(a))$.

De plus, pour tout $n \geq 0$ et $0 < r < \delta(a)$

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.}$$

En particulier f admet des dérivées de tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$ et ces dérivées $f^{(k)}$ sont holomorphes sur Ω.

Démonstration: Soit $0 < r < r_0 < \delta(a)$, d'après la formule de Cauchy, pour $z \in D(a,r)$, on a $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$.

Comme $|w - a| = r$ on aura $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$, on peut écrire,
$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$

La convergence normale sur le compact $C(a,r)$ permet d'intervertir le signe somme et le signe intégration, on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Ainsi pour tout $n \geq 0$ et $0 < r < \delta(a)$:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

En faisant tendre r vers $\delta(a)$ on obtient le résultat. ■

2.2.14 Théorème (Inégalités de Cauchy)

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0; R)$ soit contenu dans Ω. Alors, pour tout $n \geq 0$ on a

$$\boxed{\frac{\left|f^{(n)}(z_0)\right|}{n!} \leq \frac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{R^n}} \tag{2.20}$$

Démonstration: Soit le lacet $\gamma : [0,1] \longrightarrow D(z_0; d_{z_0})$, $t \mapsto Re^{2i\pi t} + z_0$. On a $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$ d'où $\dfrac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} = \dfrac{1}{2\pi}\left| \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \right|$

Comme $\left| \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \leq \dfrac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{R^{n+1}}$, par conséquent

$\dfrac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{R^{n+1}} \lambda(\gamma)$. Mais $\lambda(\gamma) = 2\pi R$, d'où le résultat.■

2.2.16 Théorème (Morera)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle pour tout lacet γ dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Alors f est holomorphe dans Ω.

Démonstration: D'après le théorème 2.1.28, cette condition est équivalente à l'existence d'une primitive F de f dans Ω. Alors F est holomorphe et il en est de même pour sa dérivée $f = F'$ d'après le théorème 2.2.12 ■

2.2.18 Remarque

La réciproque de ce théorème i.e. f holomorphe entraîne $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, n'est pas vraie pour tout domaine Ω.

Par exemple, si $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ et $f = \frac{1}{z}$. Alors f est holomorphe dans le domaine Ω, mais $\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \neq 0$, si γ est le cercle unité.

Fonctions entières

Lorsque le domaine $\Omega = \mathbb{C}$, on a pour tout $a \in \Omega$, $\delta(a) = +\infty$ ainsi d'après le théorème 2.2.12, toute fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ est la somme d'une série entière convergente dans $\mathbb{C}$.

2.2.19 Définition
On appelle fonction **fonction entière** toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Comme $\mathbb{C}$ est un domaine simplement connexe on a (voir 2.2.7)

2.2.20 Théorème
Toute fonction entière admet une primitive.

D'autres résultats sur les fonctions entières des

2.2.21 Théorème (Théorème de Liouville)
Une fonction entière et bornée est constante.
En particulier, une fonction entière f telle que $\lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty} f(z) = 0$, est identiquement nulle.

Démonstration: Soit $M \geq 0$ tels que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
D'après les inégalités de Cauchy on a : pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{R} \leq \frac{M}{R}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $f'(z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, d'où f est constante.
Maintenant si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty} f(z) = 0$ alors f est bornée.
En effet, cette condtion entraîne l'existence d'un nombre $R > 0$ tel que : $|f(z)| < 1$ si $|z| > R$ et par suite $\sup\limits_{\mathbb{C}} |f(z)| \leq 1 + \max\limits_{|z|\leq R} |f(z)|$.
D'après ce qui précède f est constante et cette constante ne peut être que 0. ∎

2.2.23 Corollaire (Théorème de d'Alembert)
Tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine.

---

i.e. pour $P \in \mathbb{C}[Z]$ un polynôme de degré $n \geq 1$, il existe des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ et c, des entiers positifs $m_1, \ldots, m_k$ tels que $m_1 + \ldots + m_k = n$ et
$P(z) = c \prod_{i=1}^{k} (z - \alpha_i)^{m_i}$.

Démonstration: Soit $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ un polynôme avec $a_n \neq 0$.

Supposons que P ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$, alors la fonction $f = \frac{1}{P}$ est une fonction entière de plus

$$\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} f(z) = \lim_{|z| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{z^n (a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n})} = 0$$

D'aprés le théorème précédent f est identiquement nulle, ce qui est absurde. ∎

Résultats sur des domaines : principe du maximum et théorème des zéros isolés

2.2.25 Théorème (Principe du maximum)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et non constante. Alors la fonction $|f|$ n'admet pas de maximum dans Ω.

Démonstration: Supposons $|f|$ atteint son maximum en $a \in \Omega$. Posons $B = \{z \in \Omega; |f(z)| = |f(a)|\}$.

<u>B est un fermé de Ω</u> : car la fonction $|f|$ est continue et $B = |f|^{-1}\{|f(a)|\}$.

<u>B est un ouvert de Ω</u> En effet, si $z \in B$, d'après l'inégalité de Cauchy pour $n = 0$, $|f|$ est constante égale à $|f(a)|$ sur tous les cercles centrés en z et contenu dans un disque centré en z et contenu dans Ω, donc constante sur tout le disque, i.e. le disque est contenu dans B.

Ainsi B est ouvert et fermé non vide dans Ω, il est donc égal à Ω. Mais $|f|$ constant dans un domaine entraîne f constante (utiliser les conditions de cauchy-Riemann). ∎

2.2.27 Corollaire

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue dans $\overline{\Omega}$, holomorphe et non constante sur Ω. Alors la fonction $|f|$ atteint son maximum sur la frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

Démonstration: Comme $\overline{\Omega}$ est compact et $|f|$ est continue, $|f|$ atteint son maximum dans $\overline{\Omega}$. D'après le principe du maximum, ce maximum n'est pas atteint dans Ω, donc il sera atteint sur la frontière. ∎

Le théorème des zéros isolés

2.2.29 DÉFINITION

1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et $a \in A$. On dit que a est **isolé dans** A, s'il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \cap A = \{a\}$, où $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}$.
2. Un sous-ensemble A de $\mathbb{C}$ est **discret** si tous ses points sont isolés.

2.2.30 THÉORÈME

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $a \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$, alors f est identiquement nulle.

Démonstration: Posons $A = \{z \in \Omega; f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \geq 0\}$.

A est un fermé de Ω : En effet, comme les $f^{(n)}$ sont des fonctions continues, alors $A = \cap_{n\geq 0}(f^{(n)})^{-1}(0)$ est fermé dans Ω comme intersection de fermés de Ω,

A est un ouvert de Ω En effet, si $z_0 \in A$, alors d'après le théorème 2.2.12, le disque $D(z_0; d_{z_0})$ est contenu dans Ω.

Donc A est ouvert et fermé dans Ω, de plus $a \in A$ montre que A n'est pas vide. Alors $A = \Omega$ d'après la connexité de Ω et ainsi f est identiquement nulle.■

2.2.32 COROLLAIRE

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si f n'est pas identiquement nulle alors les zéros de f sont isolés i.e.
$Z(f) := \{z \in \Omega | f(z) = 0\}$ est un sous-ensemble discret de Ω.

Démonstration: Soit $z_0 \in \Omega$ un zéro de f i.e. $f(z_0) = 0$. comme f n'est pas identiquement nulle d'après le théorème 2.2.30, il existe $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, et $f^{(k)}(z_0) = 0, 0 \leq k \leq m-1$, de sorte que le développement en série de Taylor de f dans le disque $D(z_0; d_{z_0})$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq m} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m \left[1 + c(z-z_0) + \cdots\right]$$

D'où il existe $0 < r < \delta(z_0)$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, on obtient ainsi un voisinage de z_0 dans lequel il n'y a pas d'autres zéros de f autre que z_0. ■

2.2.34 COROLLAIRE
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Soit z_0 est un zéro de f.
Alors il existe un unique entier $m > 0$ tel que $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{si} \quad k \leq m-1 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$, une fonction holomorphe g vérifiant $g(z_0) \neq 0$ tels que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

L'entier m est appelé mutiplicité du zéro z_0.

2.2.35 COROLLAIRE (THÉORÈME D'IDENTITÉ)
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes dans Ω et $a \in \Omega$. On suppose qu'il existe une suite $\{z_n\}$ dans $\Omega \setminus \{a\}$ qui converge vers a et telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout $n \geq 0$. Alors $f \equiv g$.

Démonstration: La fonction $h = f - g$ admet les z_n et le point a pour zéros. Comme la suite $\{z_n\}$ est différente de a et converge vers a, le zéro a est donc non isolé d'où $h \equiv 0$. ∎