Chapitre 2

Intégrale curviligne et applications aux fonctions holomorphes

2.1 Intégrale curviligne - Indice d'un point par rapport à un lacet

2.1.1 Définitions et propriétés de bases

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, on décompose f en partie réelle et imaginaire, $f(t) = u(t) + iv(t)$. On supposera que u et v sont continues.

On définit

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \tag{2.1}$$

où les intégrales de u et v ont le sens usuel des intégrales de fonctions d'une variable réelle au sens de Riemann.

On veut étendre cette définition aux intégrales de fonctions le long de chemins ou courbes dans $\mathbb{C}$.

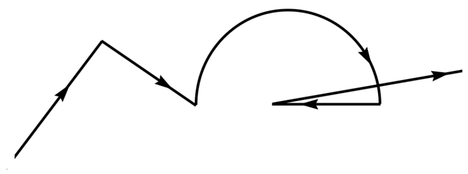
2.1.2 Chemins et lacets

2.1.1 Définition

Un **chemin** (ou courbe ou arc) est, par définition, une application *continue* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ d'un intervalle fermé et borné I de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) dans $\mathbb{C}$.

Le chemin est dit C^1 *par morceaux* si on peut subdiviser l'intervalle $I = [a,b]$ en un nombre fini de sous-intervalles $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tel que $\gamma_i = \gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est de classe C^1 i.e. γ_i' est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

1. Le point $\gamma(a)$ (resp. $\gamma(b)$) est appelé l'origine (resp. l'extrémié) du chemin γ.
2. Un **lacet** est un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
3. On note par γ^* l'image du chemin γ. On dit qu'un chemin γ est contenu dans un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$, si son image $\gamma^* \subset \Omega$.



Dans toute la suite, sauf mention contraire,

tous les chemins seront supposés continus et C^1 par morceaux.

On dit qu'un lacet γ est **simple** si $\gamma(t) \neq \gamma(t')$, pour tout $t, t' \in]a, b[$ tels que $t \neq t'$ i.e. $\gamma|_{]a,b[}$ est injective.

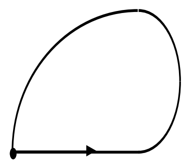


FIGURE 2.1 – lacet simple

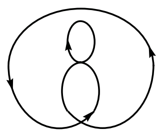


FIGURE 2.2 – lacet non simple

Le théorème de Jordan suivant, exprime un fait intuitivement évidente mais, dont la démonstration est étonnamment difficile.

2.1.2 THÉORÈME (DE JORDAN)
Le complémentaire $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, d'un lacet simple γ, a deux composantes connexes, l'une est bornée (appelée l'intérieur de la courbe) et l'autre n'est pas bornée (appelée l'extérieur de la courbe) .

L'**orientation positive** de γ est telle que quand on se déplace le long du lacet la composante bornée est à gauche. Par exemple, l'orientation du cercle trigonometrique.

2.1.3 EXEMPLE. i) Si l'application γ est constante dans I, γ^* est réduit à un point de $\mathbb{C}$. On dit dans ce cas que c'est un *lacet constant*.

ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma_\alpha : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) = e^{2i\pi\alpha t}$.
Alors $\gamma_\alpha(I) \subset C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.
Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma_n(I) = C$, mais, tout point du cercle est obtenu pour $|n|$ valeurs distinctes de t. On dit que le cercle unité est parcouru n fois.

Cet exemple montre qu'il est essentiel de ne pas confondre un chemin γ et son image $\gamma^* = \gamma(I)$.

2.1.4 Définition

Un chemin $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une reparamétrage du chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, s'il existe une application de classe C^1 $\phi : [a,b] \longrightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ avec
$\phi'(t) > 0, \phi(a) = \tilde{a}$ et $\phi(b) = \tilde{b}$ telle que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\phi(t))$.

Pour un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on définit **le chemin opposé**, $-\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, par $-\gamma(t) := \gamma(a+b-t)$. C'est le chemin γ parcouru en sens inverse.

Etant donnés deux chemins $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. et $\gamma_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$. tels que l'origine $\gamma_2(c)$ de γ_2 soit l'extrémité de $\gamma_1(b)$ de γ_1. On appelle **juxtaposition** (ou joint) de γ_1 et γ_2, noté $\gamma_1 \vee \gamma_2$, le chemin $[a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini comme suit :

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \le t \le b, \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{si } b \le t \le b+d-c. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1.5 Remarque

Pour tout chemin γ, $\gamma \vee (-\gamma)$ est un lacet.

Longuer d'arc

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin.

A toute subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ de $[a,b]$, on associe la ligne polygonale de sommets $\gamma(t_i)$ $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ inscrite dans γ, notée $(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n))$.

Une approximation de la longueur de γ par rapport à σ est la longueur de cette ligne polygonale i.e.

$$L_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

et si Partition$[a,b]$ est l'ensemble des subdivision de $[a,b]$ alors la longueur de l'arc γ est

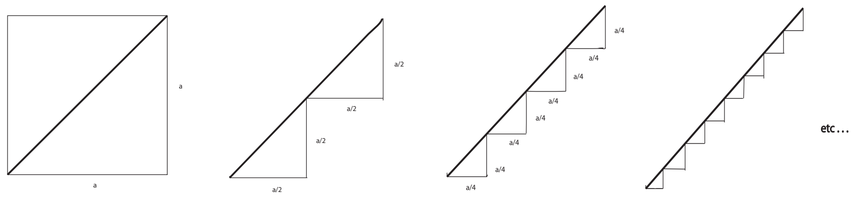
$$\lambda(\gamma) := \sup \left\{ L_\sigma(\gamma) \mid \sigma \in \text{Partition}[a,b] \right\},$$

On dit que l'arc γ est **rectifiable** si sa longueur est finie.

2.1.6 Exercice Montrer que le plus court chemin entre deux points est le segment qui les joint. (*Hint :* utiliser l'inégalité triangulaire).

2.1.7 EXEMPLE. Si on veut calculer la longueur L de la diagonale du carré de côté $a > 0$, par la suite de lignes polygonales (voir figure) on trouve $2a$, mais on sait d'autre part (pythagore) que $L = a\sqrt{2}$, ce qui entraînerait $2 = \sqrt{2}$, où est l'erreur ?

On fait, cette suite de lignes polygonales n'est pas une approximation de la longueur L, car elle n'est inscrite dans la diagonale i.e. certains sommets ne sont pas sur la diagonale.



Si l'arc est de classe C^1, sa longueur peut être calculée par le théorème suivant :

2.1.8 THÉORÈME (Longueur d'arcs C^1)
Si $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, alors

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Démonstration: Il suffit de montrer (i) $L_\sigma(\gamma)$ est inférieure à l'intégrale précédente pour toute subdivision $\sigma \in \text{Partition}[a,b]$, et (ii) qu'il existe une suite σ_n de subdisvisions de $[a,b]$ telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} L_{\sigma_n}(\gamma)$ est égale à l'intégrale. La première est une conséquence de l'exercice précédent. Pour démontrer la seconde partie, on prend pour σ_n la subdivision définie par
$t_i := a + i(b-a)/n$. Par définition de l'intégrale, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver n assez grand tel que

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma'(t_i)| \frac{(b-a)}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Maintenant d'après le théorème des accroissements finis on a,

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| - \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma'(t_i)| \frac{(b-a)}{n} \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sup_{s_i \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(s_i)| - |\gamma'(t_i)| \Big) \frac{(b-a)}{n} \right|.$$

et d'après l'inégalité triangulaire

$$\sup_{s_i \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(s_i)| - |\gamma'(t_i)| \leq \sup_{s_i \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(s_i) - \gamma'(t_i)|.$$

Finalement, comme γ' est continue sur $[a,b]$, on peut choisir n assez grand pour que

$$\sup_{s_i \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(s_i) - \gamma'(t_i)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Les trois dernière inégalités donnent

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| - \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma'(t_i)| \frac{(b-a)}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.4}$$

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \right| \leq \epsilon$$

ce qui termine la preuve. ■

2.1.10 REMARQUE
Pour un arc C^1 par morceaux, la formule précédente permet de calculer sa longueur comme somme finie des arcs C^1 qui le composent.

2.1.3 Intégrale le long d'un chemin

2.1.11 DÉFINITION
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin C^1 *par morceaux* (comme dans 2.1.1) tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$.

L'expression

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \tag{2.5}$$

est appelée l'intégrale de f le long du chemin γ.

Cette définition est analogue à celle de l'intégrale le long d'un chemin γ des fonctions à deux variables réelles : Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et γ un chemin.

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\, dt \tag{2.6}$$

où $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

La relation entre ces deux définitions est donnée par :

2.1.12 PROPOSITION
Si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma P(x,y)dx - Q(x,y)dy + i \int_\gamma P(x,y)dy + Q(x,y)dx \tag{2.7}$$

Démonstration: $f(\gamma(t))\gamma'(t) = [P(x(t),y(t)) + iQ(x(t),y(t))].[x'(t) + iy'(t)]$
$= [P(x(t),y(t))x'(t) - Q(x(t),y(t))y'(t)] + i[P(x(t),y(t))y'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]$
En intégrant les deux membres sur $[a_i, a_{i+1}]$ par rapport à t, on obtient le résultat désiré. ■

On peut facilement mémoriser ce résultat, on écrivant formellement
$f(z)dz = (P + iQ)(dx + idy) = (Pdx - Qdy) + i(Pdy + Qdx)$.

2.1.14 PROPOSITION
Pour des fonctions continues f, g, des constantes c_1, c_2, et des chemins γ, γ_1, γ_2, on a

i) $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g)(z)\,dz = c_1 \int_\gamma f(z)\,dz + c_2 \int_\gamma g(z)\,dz$

ii) $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

iii) $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

vi) Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un **lacet constant** i.e. l'image de γ est un point, $\gamma^* = \{\gamma(a)\}$, alors
$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

2.1.15 Exercice Démontrer cette proposition.

2.1.16 PROPOSITION
Si $\tilde{\gamma}$ est un reparamétrage de γ, alors

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

pour toute fonction continue f définie dans un ouvert contenant l'image de γ qui est aussi l'image de $\tilde{\gamma}$.

Démonstration: On peut, quitte à subdiviser $[a,b]$, supposer que γ est de classe C^1. Alors, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. Comme $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, on a $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}(\phi(t)).\phi'(t)$. Soit $s = \phi(t)$ la nouvelle variable, alors $s = \tilde{a}$ lorsque $t = a$ et $s = \tilde{b}$ lorsque $t = b$ ainsi $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(\phi(t)))\tilde{\gamma}(\phi(t)).\phi'(t)\,dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)\,dt$
$= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$.■

2.1.18 EXEMPLE. On veut évaluer $\int_\gamma x\,dz$, où γ est le segment d'origine $z = 0$ et d'extrémité $z = 1 + i$.

Dans ce cas, on peut choisir le paramétrage du chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $\gamma(t) = t + it$ et la fonction f à intégrer est $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = x = \mathfrak{Re}(z)$. Alors, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma x\,dz = \int_0^1 x \circ \gamma(t)\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \mathfrak{Re}(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ d'où
$\displaystyle\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 t(1+i)\,dt = \frac{1+i}{2}$

2.1.19 EXEMPLE (EXEMPLE FONDAMENTAL). Soit $m \in \mathbb{Z}$, $R > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On note par $C^+(z_0, R)$ le cercle de centre z_0 et de rayon R, orienté dans le sens positif (i.e. dans le sens trigonométrique) et parcouru une seule fois. Une paramétrisation est donnée par
$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, telle que $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$.

On va montrer : $\boxed{\int_{C^+(z_0,R)} (z - z_0)^m \, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } m = -1 \end{cases}}$

En effet, $\gamma'(t) = iRe^{it}$, et $\int_{C(z_0,R)^+} (z - z_0)^m \, dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t) - z_0)^m \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^m \, iRe^{it} \, dt$
$= iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } m = -1. \end{cases}$

On rappelle que la longueur d'un chemin (de classe C^1) $\gamma = x + iy : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, est définie par

$\boxed{\lambda(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt}$

Comme $dz = dx + idy$, on aura $|dz| = |\gamma'(t)| \, dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$ et ainsi $\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \int_\gamma |dz|$. Le résultat suivant donne un bon moyen d'estimer les intégrales.

2.1.20 PROPOSITION
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ un chemin. Soit $M \geq 0$ telle que $|f(z)| \leq M$ pour tout z dans l'image de γ, alors

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| \leq M\lambda(\gamma)$$

Démonstration: Pour une fonction à valeurs complexes $g(t) = u(t) + iv(t)$ définie dans $[a, b]$, on a

$$\mathfrak{Re} \left(\int_a^b g(t) \, dt \right) = \int_a^b \mathfrak{Re} g(t) \, dt$$

car, $\int_a^b g(t) \, dt = \int_a^b u(t) \, dt + i \int_a^b v(t) \, dt$.
On va utiliser cette remarque pour montrer que

$$\left| \int_a^b g(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| \, dt$$

Posons $\int_a^b g(t) \, dt = re^{i\theta}$ où $r \geq 0$ et θ sont deux réels fixés.
Alors,

$$r = \mathfrak{Re}(r) = \mathfrak{Re} \int_a^b e^{-i\theta} g(t) \, dt = \int_a^b \mathfrak{Re}(e^{-i\theta} g(t)) \, dt$$

D'autre part, $\mathfrak{Re}(e^{-i\theta}g(t)) \leq |e^{-i\theta}g(t)| = |g(t)|$, d'où $\int_a^b \mathfrak{Re}(e^{-i\theta}g(t))\,dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$ et par suite $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = r \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$, par conséquent $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$ Si $|f(\gamma(t))| \leq M$, alors

$$\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M\lambda(\gamma).$$

■

2.1.4 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Le Théorème fondamental du calcul intégral et différentiel est un résultat de base, pour les fonctions d'une variable réelle, qui dit essentiellement que l'intégrale de la dérivée d'une fonction est égale à la différence des valeurs prises par cette fonction aux bornes de l'intervalle d'intégration. On va établir l'analogue de ce théorème pour les fonctions à valeurs complexes.

2.1.22 THÉORÈME

Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et de classe C^1 et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors,

$$\boxed{\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))} \tag{2.8}$$

En particulier, si γ est un lacet (i.e. $\gamma(b) = \gamma(a)$),

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$$

Démonstration: Posons $F(\gamma(t)) = U(t) + iV(t)$ alors, $\frac{\partial}{\partial t}(F(\gamma(t))) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = U'(t) + iV'(t)$ D'où

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F'(z)\,dz &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b U'(t)\,dt + i\int_a^b V'(t)\,dt \\
&= U(b) - U(a) + i(V(b) - V(a)) \\
&= U(b) + iV(b) - (U(a) + iV(a)) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

■

L'utilisation de ce résultat peut épargner bien des efforts.

2.1.24 EXEMPLE. Soit à calculer $\int_\gamma z^3\,dz$ où γ est la portion d'éllipse $x^2+4y^2=1$ qui relie $z=1$ à $z=\frac{i}{2}$. Pour évaluer cette intégrale, on remarque que $z^3=\frac{1}{4}(z^4)'$ et donc

$$\int_\gamma z^3\,dz = \left[\frac{z^4}{4}\right]_1^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{i}{2}\right)^4 - 1^4\right) = -\frac{15}{64}. \tag{2.9}$$

On notera qu'on n'a pas eu besoin de paramétrer le chemin et qu'on obtient le même résultat pour tout chemin reliant 1 à $\frac{i}{2}$.

2.1.25 EXEMPLE. D'après le calcul de 2.1.19, l'intégrale de $\frac{1}{z}$ le lond du lacet $C^+(0,R)$ est égale à $2i\pi$ donc non nulle, ainsi la fonction $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}-\{0\}$ i.e. le logarithme n'a pas de détermination dans $\mathbb{C}-\{0\}$.

2.1.5 Primitives

2.1.26 DÉFINITION
Soit $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
Une **primitive de** f dans Ω est une fonction holomorphe $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ telle que $F'=f$.

2.1.27 REMARQUE
Une primitive d'une fonction continue dans un ouvert est une fonction holomorphe dont la dérivée f' est continue, elle est donc de classe C^1.

2.1.28 THÉORÈME
Soit $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue dans un domaine $\Omega\subset\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) f admet un primitive dans Ω.

ii) Il existe une fonction $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ telle que pour tout chemin $\gamma:[a,b]\longrightarrow\Omega$,

$$\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

iii) L'intégrale le long de tout lacet est nulle : i.e. si γ est un lacet de Ω, alors

$$\int_\gamma f\,dz = 0 \tag{2.10}$$

iv) L'intégrale ne dépend pas du chemins i.e. si z_0 et z_1 sont deux points de Ω et γ_0 et γ_1 sont deux chemins de Ω reliant z_0 à z_1, alors

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz \tag{2.11}$$

Démonstration: .

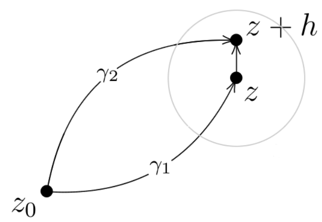
$i) \Rightarrow ii)$ Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un chemin C^1 et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $F' = f$, alors $h(t) = F(\gamma(t))$ est de classe C^1 et $h'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, d'où $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = h(b) - h(a) = \int_a^b h'(t)\,dt = \int_\gamma f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f\,dz$.

$ii) \Rightarrow iii)$ trivial

$iii) \Rightarrow iv)$ Soient $\gamma_0, \gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ deux chemins tels que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.
On définit $\gamma = \gamma_1 \vee (-\gamma_2) : [0,2] \longrightarrow \Omega$ est un lacet

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_0} F'(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma_1} F'(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz \tag{2.12}$$

$iv) \Rightarrow i)$ On va définir au moyen de l'intégrale une primitive de f. On fixe un point z_0 de Ω. Soit z un autre point de Ω. Comme Ω est un domaine, il existe un chemin γ_1 dans Ω reliant z_0 à z. On pose $F(z) = \int_{\gamma_1} f(\xi)\,d\xi$. On obtient ainsi une fonction F dans Ω, car d'après l'hypothèse *iv*), la valeur $F(z)$ ne dépend que de z et pas du chemin choisi. On dit que F est **bien définie**. Il reste à montrer que F est dérivable et que $F' = f$. Soit $\epsilon > 0$. Comme Ω est ouvert et f continue en z, il existe $\delta > 0$ tel que le disque $D(z;\delta) \subset \Omega$ et $|f(z+h) - f(z)| < \epsilon$ si $|h| < \delta$.



Soit $z + h \in D(z;\delta)$, comme le disque est convexe, le chemin $\rho(t) = z + th$, $0 \le t \le 1$ est contenu dans $D(z;\delta)$. on pose $\gamma_2 = \rho \vee \gamma_1$. Alors :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_2} f(\xi)\,d\xi - \int_{\gamma_1} f(\xi)\,d\xi = \int_\rho f(\xi)\,d\xi$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &= \frac{|F(z+h)-F(z)-hf(z)|}{|h|}\\ &= \frac{|\int_\rho f(\xi)\,d\xi - f(z)\int_\rho 1\,d\xi|}{|h|}\\ &= \frac{|\int_\rho f(\xi)-f(z)\,d\xi|}{|h|}\\ &\leq \frac{\epsilon\lambda(\rho)}{|h|} = \frac{\epsilon|h|}{|h|} = \epsilon\end{aligned} \tag{2.13}$$

■

Donc $\lim_{h\longrightarrow 0}\dfrac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$, par suite F est dérivable et $F' = f$, comme souhaité.■

2.1.30 EXEMPLE. **1)** Soit γ le cercle de rayon $r>0$ et de centre $a\in\mathbb{C}$ orienté positivement. Calculer $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$ pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$.

Solution : Premièrement si $n\geq 0$ alors, $(z-a)^n = \frac{1}{n+1}((z-a)^{n+1})'$ est la dérivée d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, d'après le théorème précédent $\int_\gamma (z-a)^n\,dz = 0$ Secondo, pour $n\leq -2$, on a aussi $(z-a)^n = \frac{1}{n+1}((z-a)^{n+1})'$ qui est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Comme γ est un lacet du domaine Ω, on a $\int_\gamma (z-a)^n\,dz = 0$ Finalement, si $n=-1$. On va calculer directement. On paramètre γ par $\gamma(t) = re^{it}+a$, $0\leq t\leq 2\pi$. Alors $\gamma'(t) = ire^{it}$, d'où

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{(re^{it}+a)-a}\,ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi.$$

En résumé :

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq -1,\\ 2i\pi & \text{si } n=-1.\end{cases} \tag{2.14}$$

2) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ telle que $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Solution : Si une telle fonction existe, alors $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$ si γ est le cercle unité. Mais, d'après le cacul précédent $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi \neq 0$.■

2.1.31 REMARQUE

Il s'en suit, qu'il n'existe pas de détermination du logarithme dans le domaine $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

2.1.32 PROPOSITION

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue.

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f. Alors il existe $c\in\mathbb{C}$ tel que $F_1 = F_2 + c$.

Démonstration: $F_1' = F_2' = f$, par suite $F_1' - F_2' = 0$ dans Ω, d'où $F_1 = F_2 + \textit{constante}$. ■

2.1.6 Indice d'un point par rapport à un lacet

Il existe une formule utile pour exprimer combien de fois une courbe fermée ou lacet γ tourne autour d'un point donné z_0. Ce nombre, est appelé **indice de γ par rapport au point z_0.**

La formule qu'on va utiliser pour calculer l'indice est basée sur le calcul qu'on a fait dans l'exemple 3.12 : Si γ est le cercle unité $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2i\pi \tag{2.15}$$

Si $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2n\pi$, alors γ tourne autour de l'origine n fois, et on trouve de la même façon

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = n \tag{2.16}$$

Notation : Pour un chemin $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ on notera par γ^* son image $\gamma(I)$.

2.1.34 DÉFINITION

Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ un point qui n'est pas sur γ i.e. $z_0 \notin \gamma^*$.

On appelle indice de z_0 par rapport à γ le nombre

$$\boxed{Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)}\, dz} \tag{2.17}$$

2.1.35 REMARQUE

i) $Ind_\gamma(z_0)$ n'est pas défini si $z_0 \in \gamma^*$

ii) $Ind_{-\gamma}(z_0) = -Ind_\gamma(z_0)$

iii) Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets de même origine et $z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ alors

$$Ind_{\gamma_1 \vee \gamma_2}(z_0) = Ind_{\gamma_1}(z_0) + Ind_{\gamma_2}(z_0).$$

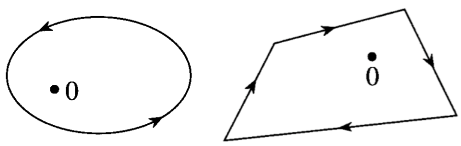


FIGURE 2.3 – l'indice de 0 par rapport au premier lacet est 1 et par rapport au second -1

2.1.36 THÉORÈME (THÉORÈME DE L'INDICE)

Pour tout lacet $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :

(i) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $Ind_\gamma(z_0)$ est un entier.

(ii) la fonction $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est une fonction continue.

(iii) Elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et est nulle sur la composante non-bornée .

Démonstration: (i) Soit

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds$$

alors aux points où $\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}$ est continue, on a

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

Par suite

$$\frac{d}{dt} e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0) = 0$$

au point où $g'(t)$ existe, et alors $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est constante par morceaux sur $[a, b]$. Mais, $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est continue, donc elle est constante sur $[a, b]$.
On obtient alors $e^{-g(a)}(\gamma(a) - z_0) = e^{-g(b)}(\gamma(b) - z_0)$.
Comme γ est un lacet $\gamma(a) = \gamma(b)$, ce qui entraîne $e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$.
D'autre part $g(a) = 0$, d'où $e^{-g(b)} = 1$ par conséquent il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(b) = 2in\pi$ i.e.

$$n = \frac{g(b)}{2i\pi} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)}\, dz = Ind_\gamma(z_0)$$

(ii) Fixons $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et soit $r > 0$ tel que le disque $D(z_0; 2r)$ soit contenu dans $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ tel que $|z - z_0| \leq r$ on a
$Ind_\gamma(z) - Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(\xi - z)}\, d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(\xi - z_0)}\, d\xi = \frac{z_0 - z}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{((\xi - z)(\xi - z_0))}\, d\xi.$
Comme pour tout $\xi \in \gamma^*$ on a $|\xi - z_0| \geq 2r$ et $|\xi - z| \geq r$, on aura
$|Ind_\gamma(z) - Ind_\gamma(z_0)| \leq \dfrac{|z_0 - z|}{4\pi r^2} \lambda(\gamma)$ ce qui prouve la continuité.

(iii) Comme $Ind_\gamma(.)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est alors constante sur chaque composante connexe.
On notera que γ^* est un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}$, d'où il existe $R > 0$ tel que $\gamma^* \subset \overline{D}(0; R)$, alors, la composante non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ est le domaine contenu dans $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et contenant $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R)$. On notera par C_∞ cette composante.
Soit $z_0 \in C_\infty$ tel que $|z_0| > R$. Comme $|z - z_0| \geq |z_0| - R$ sur γ^*, on a

$$|Ind_\gamma(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz \Big| \leq \frac{1}{2\pi} . \frac{1}{|z_0| - R} \lambda(\gamma)$$

et donc $|Ind_\gamma(z_0)|$ tend vers 0 lorsque $|z_0|$ vers $+\infty$. Comme $Ind_\gamma(z)$ est constante dans le domaine C_∞, cette constante est 0. ■

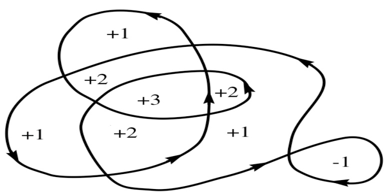
2.1.38 Exemple (fondamental). Soit $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{2in\pi t}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.
Alors,

$$Ind_{\gamma_n}(z) = \begin{cases} n & \text{si } z \in D(0;R), \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0;R). \end{cases}$$

Démonstration: L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ a deux composantes, une bornée $D(0;R)$ et une non-bornée $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0;R)$.
Si $z_0 \in D(0;R)$ alors $Ind_\gamma(z_0) = Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = n$
Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0;R)$, alors $Ind_\gamma(z_0) = 0$. ■

2.1.40 Définition
Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet. On appelle **intérieur** de γ, l'ensemble $Int(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\gamma(z) \neq 0\}$ et **extérieur** de γ, l'ensemble $Ext(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\gamma(z) = 0\}$.
On remarquera que $\mathbb{C} = Int(\gamma) \cup \gamma^* \cup Ext(\gamma)$.

Comme $Ind_\gamma(z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \overline{\gamma^*}$, $Int(\gamma)$ et $Ext(\gamma)$ sont des ouverts et leurs frontières vérifient : $\partial(Int(\gamma)) \subset \gamma^*$ et $\partial(Ext(\gamma)) \subset \gamma^*$. Dans ce dessin, chaque nombre répresente la valeur de l'indice d'un point ce



trouvant dans le domaine correspondant. L'indice vaut 0 pour les points dans le domaine non borné.

2.1.7 Une méthode de calcul de l'indice

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et $u \in C^*$.

On suppose que la demi-droite de direction u et d'origine z_0 coupe γ en un nombre fini de points $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots \gamma(t_n)$, $(0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n)$ tels que les tangentes $\gamma'(t_i)$ existent et ne sont pas parallèles à u i.e. $\{u, \gamma'(t_i)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ pour tout $i \in \{1, 2 \dots, n\}$. On pose $\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \det[u, \gamma'(t_i)] > 0, \\ -1 & \text{si } \det[u, \gamma'(t_i)] < 0. \end{cases}$

Alors, $Ind_\gamma(z_0) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$.

S'il existe une demi-droite de direction $u \in \mathbb{C}^*$ et d'origine z_0 qui ne coupe pas γ alors $Ind_\gamma(z_0) = 0$.

2.1.41 Exercice Démontrer ce résultat.

2.2 Le théorème de Cauchy-Goursat

2.2.1 THÉORÈME (THÉORÈME DE CAUCHY-GOURSAT)
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit γ un lacet tel que $Int(\gamma) \subset \Omega$. Alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Ce théorème s'applique à tout domaine et à tout lacet dont l'intérieur est contenu dans le domaine.

2.2.2 REMARQUE

1) la condition $Int(\gamma) \subset \Omega$ est équivalente à : "$z \notin \Omega$ entraîne $Ind_\gamma(z) = 0$ "
Il est important de noter que cette condition est nécessaire.
En effet, s'il existe γ un lacet de Ω tel que $Int(\gamma) \not\subset \Omega$ alors il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tel que $Ind_\gamma(a) \neq 0$.
Alors la fonction $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur Ω mais $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi Ind_\gamma(a) \neq 0$.
2) On ne peut pas juste appliquer le théorème 2.1.28, car on ne sait pas si f admet une primitive dans Ω.

La démonstration de ce théorème est assez longue, elle se trouve à la fin du §3.

2.2.1 Primitives dans un domaine simplement connexe

On a déja montrer (voir Remarque 2.1.31) que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive dans Ω. On remarquera la présence d'un "trou" dans Ω.

On va s'intéresser aux domaines de $\mathbb{C}$ dans lesquels toute fonction holomorphe admet une primitive. On appelle un tel domaine, un domaine simplement connexe.

2.2.3 DÉFINITION
Un domaine Ω de $\mathbb{C}$ est dit **simplement connexe** si l'intérieur de tout lacet dans Ω est contenu dans Ω.

Ceci est équivalent à dire que si γ est un lacet de Ω alors pour tout $z \notin \Omega$ on a $Ind_\gamma(z) = 0$.

2.2.4 EXEMPLE. 1) $\mathbb{C}$, un disque, un demi-plan, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, une bande $B = \{z \in \mathbb{C}; a < \mathfrak{Im}(z) < b\}$ sont des domaines simplement connexes.

2) Les ensembles suivants ne sont pas simplement connexes :

(i) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) l'extérieur du disque unité $\Omega = \mathbb{C} \setminus D(0;1)$.

(iii) Une couronne $C(a;r;R) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z-a| < R\}$.

2.2.5 Exercice Un domaine Ω est dit **étoile par rapport au point** $a \in \Omega$ si pour tout $z \in \Omega$, le segment $[a;z] := \{\xi \in \mathbb{C}; \xi = a + t(z-a),\ 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans Ω. On dit dans ce cas que a est un centre de Ω.

Montrer que tout domaine étoilé est simplement connexe.

Solution :

Quitte à faire une translation on peut supposer que $a = 0$.
Soit alors $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un lacet et $z_0 \notin \Omega$ fixé.

Pour tout $s \in [0,1]$ posons $\Gamma(t,s) = s\gamma(t)$ et définissons le lacet Γ_s par $\Gamma_s(t) = s\gamma(t)$. On a pout tout $s \in [0,1]$, Γ_s est un lacet de Ω (car Ω est étoilé par rapport à 0) et $\Gamma_1 = \gamma$.

Puisque la fonction Γ est continue sur le compact $[a,b] \times [0,1]$ son image $K = \cup_{0 \leq s \leq 1} \Gamma_s^*$ est un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans Ω (puisque 0 est un centre de Ω).

Donc la distance $\delta = dist(z_0, K)$ est strictement positive. Alors pour $0 < s \leq 1$ on pose

$$f(s) = Ind_{\Gamma_s}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{s\gamma'(t)}{s\gamma(t) - z_0}\, dt = Ind_\gamma\left(\frac{z_0}{s}\right) \tag{2.18}$$

Cette dernière égalité montre que la fonction f est continue puisque $Ind_\gamma(.)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Il s'en suit que la fonction f est constante, d'où $f(s) = f(1) = Ind_\gamma(z_0)$.

Or quand $s \longrightarrow 0$, $\frac{z_0}{s} \longrightarrow \infty$ (car $z_0 \neq 0$), d'où pour s assez petit $f(s) = Ind_\gamma(\frac{z_0}{s}) = 0$ et par suite $Ind_\gamma(z_0) = 0$.$\blacksquare$

2.2.6 REMARQUE

1) Il existe des domaines simplement connexes et qui ne sont pas étoilés ; par exemples : $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{z = t + i; -\infty < t \leq 0\})$ ou le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'une spirale.

Une conséquence importante du théorème de Cauchy-Goursat et de 2.1.28 est l'existence de primitive pour toute fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe.

2.2.7 THÉORÈME

Soit Ω un domaine simplement connexe. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe alors :

i) $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ pour tout lacet $\gamma \subset \Omega$.

ii) f admet une primitive dans Ω i.e. il existe une fonction $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $F' = f$.

2.2.2 Conséquences du théorème de Cauchy-Goursat

Formule de Cauchy

2.2.8 THÉORÈME (FORMULE DE CAUCHY)
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ un lacet tel que $Int(\gamma) \subset \Omega$. Soit z_0 un point de $\Omega \setminus \gamma^*$. Alors,

$$\boxed{Ind_\gamma(z_0).f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz}$$

Le théorème dit que les valeurs de f à l'intérieur de γ sont complètement déterminées par ses valeurs sur son image γ^*.

Démonstration: Soit γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r (orienté dans le sens positif i.e. $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, r est choisit assez petit pour le disque $D(z_0, r)$ soit contenu dans $Int(\gamma)$. On va se ramener au cas où l'indice au point z_0 est nul. Sans perdre de généralité on peut supposer que $Ind_\gamma(z_0) > 0$. Soit β un chemin qui relie γ à γ_r

Alors, le lacet $\Gamma = \gamma \vee \beta \vee (-\gamma_r \vee \ldots \vee -\gamma_r) \vee -\beta$, où on prend $Ind_\gamma(z_0)$ fois le chemin $-\gamma_r$, a un indice nul en z_0 i.e. $Ind_\Gamma(z_0) = 0$.

Alors d'après le théorème de Cauchy-Goursat appliqué à la fonction holomorphe $g : \Omega - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ nous donne

$$0 = \int_\Gamma g(z)\,dz = \left(\int_\gamma + \int_\beta - \int_{\gamma_r} - \ldots - \int_{\gamma_r} - \int_\beta\right) g(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz - Ind_\gamma(z_0)\int_{\gamma_r} g(z)\,dz$$

d'où $\int_\gamma g(z)\,dz = Ind_\gamma(z_0)\int_{\gamma_r} g(z)\,dz$. D'autre part lorsque $r \longrightarrow 0$,
$\left|\int_{\gamma_r} g(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma_r}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|.2\pi r \longrightarrow |f'(z_0)|.0 = 0.$

Ainsi, $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ i.e. $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi.Ind_\gamma(z_0).f(z_0)$■

Cette formule est extrêmement utile pour le calcul. Par exemple, on obtient immédiatement que $\int_{C^+(0,1)} \frac{e^z}{z}\,dz = 2i\pi e^0 = 2i\pi$.

La formule de Cauchy est souvent utilisée dans le cas particulier où le lacet γ est un cercle et z_0 est un point du disque ouvert bordé par γ.

2.2.10 COROLLAIRE
Soit $D = D(a; R)$ un disque ouvert et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout $0 < r < R$ et pour tout $z \in D(a, r)$ on a :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+(a;r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\,d\xi} \tag{2.19}$$