3 Théorème d'inversion et fonctions implicites

Le sujet principal de ce chapitre est le comportement local d'une application différentiable est qualitativement déterminé par la différentielle en ce point.

Définition 3.0.3 *Un espace vectioriel normé* **complet** *est appelé espace de* **Banach**.

Dans toute la suite de ce chapitre les espaces vectoriels considérés seront des espaces de Banach.

Exemple 3.0.4 *Un espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach pour toute norme.*

3.1 Difféomorphisme (ou changement de variables)

Définition 3.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts.*

Soit $f : U \longrightarrow V$ une bijection.

1. *On dit que f est* **homéomorphisme** *si, f et f^{-1} sont continues.*
2. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un* **difféomorphisme** *de classe C^r si, f et f^{-1} sont de classe C^r.*

Remarque : Si f est un difféomorphisme alors :

1. f est un homéomorphisme
2. Les différentielles de f et f^{-1} en un point $a \in E$ sont liées par :

$$D\,f^{-1}(f(a)) \circ Df(a) = Id_E$$

$$Df(a) \circ D\,f^{-1}(f(a)) = Id_F$$

ceci entraîne que $D\,f^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$. Donc si f est un difféomorphisme $Df(a) : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme linéaire.

On notera par $Isom(E, F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E, F)$ des isomorphisme de E dans F.

$T \in Isom(E, F)$, entraîne que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

On notera simplement $Isom(E)$ si $E = F$.

Remarque : Voici deux mises en gardes

– f est un homémorphisme de classe C^r n'entraîne pas que f^{-1} est de différentiable. Par exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.

– Contrairement, au cas des fonctions de classe C^1, d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui est injective sur un intervalle dès que la dérivée ne s'y s'annule pas ; une application d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 2$, n'est pas nécessairement injective même si sa jacobienne est inversible en tout point de cet ouvert.
  Par exemple : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ alors,
  $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ et $\det J_f(x,y) = e^{2x} \neq 0$.
  Mais, $f(0,0) = f(0, 2\pi)$, montre que f n'est pas injective.

3.2 Résultats préliminaires

Exercice 3.2.1 *(a) Montrer que pour $T, H \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|T \circ H\| \leq \|T\|.\|H\|$ En particulier, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(b) Soit F un espace de Banach. Soit $\{x_n\}$ une suite de F. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge dans F, c-à-d qu'il existe un vecteur $S \in F$ tel que $\lim_{n\longrightarrow +\infty} \|S_n - S\| = 0$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

(c) Montrer que si F est un espace de Banach, il en est de même de $\mathcal{L}(E, F)$.

Le lemme suivant concerne la structure des isomorphismes d'un espace de Banach.

Proposition 3.1 *Soit E un espace de Banach. Alors*

1. *$Isom(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.*
2. *L'application $inv : Isom(E) \longrightarrow Isom(E)$, définie par $inv(T) = T^{-1}$ est de classe C^∞. De plus, la différentielle de inv en un point $T \in Isom(E)$, est l'application $\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $H \mapsto -T^{-1}HT^{-1}$.*

Démonstration 3.2 **(1)** *Soit Soit $H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.*

Comme $\mathcal{L}(E)$ est de Banach, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(HT^{-1})^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$, car la série $\sum_{n\geq 0} \|(HT^{-1})^n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, en effet cette dernière converge car, par hypothèse $\|H\|.\|T^{-1}\| < 1$.

$\sum_{n\geq 0} \|(HT^{-1})^k\| \leq \sum_{n\geq 0} \|H\|.\|T^{-1}\|^n = \frac{1}{1-\|H\|.\|T^{-1}\|}$

On note par S la somme de la série $T^{-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(HT^{-1})^n$.

On va vérifier que $S(T + H) = (T + H)S = Id_E$.

$$(T + H)S = (T + H) \lim_{n\longrightarrow +\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow +\infty} (T + H)S_n$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} (T+H).T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (HT^{-1})^k \right)$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} (Id_E + HT^{-1}) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (HT^{-1})^k \right)$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (HT^{-1})^k + (-1)^k (HT^{-1})^{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (HT^{-1})^k - (-1)^{k+1} (HT^{-1})^{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(Id_E - (-1)^{n+1} (HT^{-1})^{n+1} \right) = Id_E = S(T+H).$$

On a montrer que pour tout $T \in Iso(E)$, la boule ouverte de centre T et de rayon $\frac{1}{\|T-1\|}$ est contenue dans $Isom(E)$, par suite $Isom(E)$ est un voisinage de tous ses points, donc un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

(2) *Montrons maintenant que inv est différentiable.*

On a

$$inv(T+H) - inv(T) = (T+H)^{-1} - T^{-1} = T^{-1} \sum_{n \geq 0} (-1)^n (HT^{-1})^n - T^{-1} = T^{-1} \sum_{n \geq 1} (-1)^n (HT^{-1})^n$$

$$= -T^{-1}HT^{-1} + T^{-1} \sum_{n \geq 2} (-1)^n (HT^{-1})^n = -T^{-1}HT^{-1} + \|H\|.\varepsilon(H)$$

et $\lim_{H \longrightarrow 0} \varepsilon(H) = \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{T^{-1} \sum_{n \geq 2} (-1)^n (HT^{-1})^n}{\|H\|} = 0.$

Donc inv est différentiable et pour tout $T \in Isom(E)$, sa différentielle au point T est l'application $Dinv : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $H \mapsto -T^{-1}HT^{-1}$.

De plus, pour $T_0, T \in Isom$ et $H \in \mathcal{L}(E)$ on a

$$(Dinv(T) - Dinv(T_0))(H) = -T^{-1}HT^{-1} + T_0^{-1}HT_0^{-1}$$

$$= \left(-T^{-1}HT^{-1} - T^{-1}HT_0^{-1} \right) + \left(-T^{-1}HT_0^{-1} - T_0^{-1}HT_0^{-1} \right)$$

$$= \left(-T^{-1}H(T^{-1} - T_0^{-1}) \right) + \left((T_0^{-1} - T^{-1})HT_0^{-1} \right)$$

D'où

$$\| (Dinv(T) - Dinv(T_0))(H) \| \leq= \|T^{-1}\|.\|H\|.\|T^{-1} - T_0^{-1}\| + \|T_0^{-1}\|.\|H\|.\|T^{-1} - T_0^{-1}\|$$

$$= \left(\|T_0^{-1}\| + \|T^{-1}\| \right).\|T^{-1} - T_0^{-1}\|.\|H\|.$$

ceci entraîne que

$$\| (Dinv(T) - Dinv(T_0)) \| \leq \left(\|T_0^{-1}\| + \|T^{-1}\|\right).\|T^{-1} - T_0^{-1}\|$$

Maintenant si T tends T_0, par continuité de inv on aura $\|T^{-1} - T_0^{-1}\|$ qui tends vers 0, d'où la continuité de $Dinv$ c-à-d que inv est de classe C^1.

On montre de la même manière que inv est de classe C^∞.♣

Proposition 3.3 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts et $f : U \longrightarrow V$ une bijection.*

Soit $r \geq 1$. Si f et de classe C^r et f^{-1} est différentiable alors f^{-1} est de classe C^r, c-à-d que f est un difféomorphisme de classe C^r.

Démonstration 3.4 *L'application $y \mapsto Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$ est continue car, elle est la composition des trois applications continues suivantes : $y \in V \mapsto f^{-1}(y) \in U$, $x \in U \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in Isom(E, F) \longrightarrow T^{-1} \in Isom(F, E)$. Donc f^{-1} est de classe C^1.*

Par dérivation des applications composées dans la formule de Df^{-1}, on voit que si f^{-1} est de classe C^k pour $k \leq r-1$, alors Df^{-1} est de classe C^k. Par suite f^{-1} est de classe C^k. on a donc montrer par récurrence sur k que f^{-1} est de classe C^r.♣

On aura aussi besoin du théorème du point fixe (aussi connu comme le théorème de Picard)

Théorème 3.5 (Le Théorème du point fixe) *Soit (K, d) un espace métrique complet. et $\phi : K \longrightarrow K$ une application strictement contractante c-à-d qu'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que $\forall x, y \in K$ on a $d(\phi(x), \phi(y)) \leq kd(x, y)$.*

Alors ϕ admet un point fixe unique, c-à-d il exsite un unique point $z \in K$ tel que $\phi(z) = z$.

De plus, pour tout $a \in K$, la suite récurrente définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \phi(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), converge vers le point fixe z et on a l'estimation suivante :

$$d(a, z) \leq \frac{1}{1-k} d(a, \phi(a)).$$

Démonstration 3.6 *Comme ϕ est une application de K dans K, la suite récurrente $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \phi(x_n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. par récurrence sur n on a :*

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\phi(x_{n-1}), \phi(x_n)) \leq k(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq k^n d(x_0, x_1)$$

Une application répétée de l'inégalité triangulaire donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq (1 + \ldots + k^{p-1})k^n d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, \phi(a)).$$

En d'autres termes la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* K. *Comme* F *est complet, il existe* $z \in F$ *tel que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = z$.

La continuité de ϕ*, nous donne alors*

$$\phi(z) = \phi(\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_{n+1} = z$$

c-à-d que z *est un point fixe de* ϕ. *On a aussi l'unicité du point fixe* z*, en effet, si*z' *est un autre point fixe de* ϕ*, on aura*

$$0 < d(z, z') = d(\phi(z), \phi(z')) \leq kd(z, z') < d(z, z')$$

ce qui est absurde.

Finalement, en faisant tendre p vers $+\infty$ *dans l'inégalité* $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, \phi(a))$ *on a*

$$d(x_n, z) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, \phi(a))$$

et en prenant $n = 0$ *on obtient l'estimation désirée.* ♣

3.3 Le théorème d'inversion locale

Cette section est consacré au problème suivant : comment peut-on reconnaître qu'une application est un difféomorphisme et quellerégularité à l'application réciproque ?

on à déjà vu une qu'avoir une différentielle inversible est une condition nécessaire.

Le théorème d'inversion locale dit que cette condition est suffisante pour inverser localement.

Théorème 3.7 (Le théorème d'inversion locale) *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Soient* $U \subset E$ *un ouvert et* $a \in U$. *Soit* $f : U \longrightarrow F$ *une application de classe* C^1 *telle que* $Df(a) \in Isom(E, F)$. *Il existe alors un ouvert* U' *de* U *contenant* a *et un ouvert* V' *de* F *contenant* $f(a)$ *tels que :*

1. *La restriction* $f|_{U'} : U' \longrightarrow V' = f(U')$ *est un difféomorphisme de classe* C^1.

2. *Si de plus, f est de classe C^r, l'application inverse $f^{-1} : V' \longrightarrow U'$ est de classe C^r, c-à-d que f induit un difféomorphisme de classe C^r de U' sur $V' = f(U')$.*

Démonstration 3.8 *Commençons la démonstration par une petite digression. Par translation et composition on va se ramener au cas où $E = F$, $a = f(a) = 0$ et $Df(0) = Id_E$.*

En effet, posons pour tout $x \in U - a := \{y - a; y \in U\}$ (le translaté de U par le vecteur $-a$), $g(x) = (Df(a))^{-1}(f(x+a) - f(a))$ alors $g : U - a \longrightarrow E$, $g(0) = (Df(a))^{-1}(f(a) - f(a)) = 0$ et $Dg(0) = (Df(a))^{-1}(Df(a)) = Id_E$. Enfin, si g est difféomorphisme local, il en est de même de $f(x) = Df(a)(g(x - a) + f(a))$.

On est donc ramené à traiter le cas $E = F$, $a = 0$, $f(a) = 0$ et $Df(0) = Id_E$, ce que nous supposerons dans la suite.

Posons $\varphi(x) = f(x) - x$. Alors $\varphi(0) = 0$ et $D\varphi(0) = Df(0) - Id_E = 0$, d'où par continuité de $D\varphi$ en 0, il existe $r > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(0, r) \subset U$ et $\|D\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \bar{B}(0, r)$. D'après le théorème des accroissements finis, on aura $\|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$, pour tout $x \in \bar{B}(0, r)$. Donc, l'image par φ de la boule $\bar{B}(0, r)$ est contenue dans la boule $\frac{1}{2}\bar{B}(0, r) = \bar{B}(0, \frac{r}{2})$.

Affirmation : *L'image par f de la boule $\bar{B}(0, r)$ est égale à $\bar{B}(0, \frac{r}{2})$. Plus précisément, pour tout $y \in \bar{B}(0, \frac{r}{2})$, il existe un unique $x \in \bar{B}(0, r)$ tel que $f(x) = y$.*

Pour démontrer cette affirmation, on considère l'application $\varphi_y : U \longrightarrow E$ définie par $\varphi_y(x) = y - \varphi(x) = x + (y - f(x))$.

Alors x est un point fixe de φ_y si et seulement si $y = f(x)$.

Pour $y \in \bar{B}(0, \frac{r}{2})$ et $x \in \bar{B}(0, r)$, on a $\varphi(x) \in \bar{B}(0, \frac{r}{2})$ et par suite $\|\varphi_y(x)\| = \|\varphi(x) + y\| \leq \|\varphi(x)\| + \|y\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Donc, $\varphi_y(x) \in \bar{B}(0, r)$.

On peut donc, considérer φ_y comme une application de la boule fermée $\bar{B}(0, r)$(qui est un espace complet) dans elle même.

Comme $D\varphi_y(x) = D\varphi(x)$, $\|D\varphi_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \bar{B}(0, r)$ et d'après le théorème des accroissements finis, on aura $\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$, pour tout $x, x' \in \bar{B}(0, r)$. Donc, φ_y est une application strictement contractante de la boule fermée $\bar{B}(0, r)$ dans elle même ; et d'après le théorème du point fixe, φ_y à un unique pint fixe $x \in \bar{B}(0, r)$, c-à-d que $y = f(x)$. Ceci prouve l'affirmation.

D'autre part, l'estimation du théorème du point fixe 3.5, appliquée lorsque $a = 0$, donne $\|x\| \leq \frac{1}{2}\|y\|$.

On pose $V = B(0, \frac{r}{2})$. Alors V est un voisinage ouvert de $f(0) = 0$ dans E.

On note par $g : V \longrightarrow B(0, r)$ l'inverse définie par $g(y) = x$ si $y = f(x)$. L'application g est continue car,

$$\|x - x'\| \leq \|f(x) - f(x')\| + \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \|f(x) - f(x')\| + \frac{1}{2}\|x - x'\|.$$

Donc pour tout $y, y' \in V$, *on a* $g(y) - g(y')\| \leq \frac{1}{2}\|y - y'\|$.

On pose $U' = g(V)$. *Alors* $U' = f^{-1}(V)$ *est un ouvert voisinage de* 0. *D'où* $f|_{U'} : U' \longrightarrow V$ *est un homéomorphisme.*

Il reste à voir que $g = f^{-1}$ *est différentiable et d'après la proposition 3.3,* g *sera de classe* C^1.

Comme par hypothèse $Df(0) \in Isom(E)$, *quitte à restreindre* U', *on peut supposer que* $Df(x) \in Isom(E)$, *pour tout* $x \in U'$.

Soient $x_0 \in U'$ *et* $y_0 = f(x_0)$. *La différentiabilité de* f *en* x_0, *nous donne :*

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + \|x - x_0\|\varepsilon(x - x_0)$$

avec $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.

D'où

$$x - x_0 = Df(x_0)^{-1}(y - y_0) - \|x - x - 0\|Df(x_0)^{-1}(\varepsilon(x - x_0)). \qquad (3.1)$$

Comme $Df(x_0)^{-1}(0) = 0$ *et que* $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\|x - x_0\| < \delta$ *entraîne*

$$\|Df(x_0)^{-1}(\varepsilon(x - x_0))\| \leq \|Df(x_0)^{-1}\|.\|\varepsilon(x - x_0)\| \leq \frac{1}{2}.$$

En utilisant 3.1 on obtient,

$$\|x - x_0\| \leq \|Df(x_0)^{-1}\|.\|y - y_0\| + \frac{1}{2}\|x - x_0\|$$

$$\|x - x_0\| \leq 2\|Df(x_0)^{-1}\|.\|y - y_0\|$$

Posons $C = 2\|Df(x_0)^{-1}\|$, *alors* $\|x - x_0\| \leq C\|y - y_0\|$.

Comme $g = f^{-1}$ *est continue,* $\exists \delta_0$ *tel que* $\|y - y_0\| < \delta_0$ *entraîne* $\|g(y) - g(y_0)\| \leq \delta$ *donc* $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Alors

$$\lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{\|g(y) - g(y_0) - Df(x_0)^{-1}(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} = \lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{\|\|x - x_0\|.\|Df(x_0)^{-1}(\varepsilon(x - x_0))\|}{\|y - y_0\|}$$

$$\leq \lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{\|x - x_0\|}{\|y - y_0\|}.\|Df(x_0)^{-1}\|.\|\varepsilon(x - x_0)\| \leq \lim_{y \longrightarrow y_0} C.\|Df(x_0)^{-1}\|.\|\varepsilon(x - x_0)\|$$

$$\leq \lim_{x \longrightarrow x_0} 2\|\varepsilon(x - x_0)\| = 0$$

Donc g *est différentiable en* $y_0 = f(x_0)$ *et de différentielle* $Dg(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$.

Le cas f *de classe* C^r *est une conséquence de* f *de classe* C^1 *et de 3.3.* ♣

Corollaire 3.9 (Théorème d'inversion globale) *Soient E et F deux espaces de Banach.*

Soit $U \subset E$ un ouvert et $f : U \longrightarrow F$ une application de classe C^r.

On suppose que f est injective et que $\forall a \in U$, $Df(a) \in Isom(E, f)$.

Alors $f : U \longrightarrow f(U)$ est un difféomorphisme de classe C^r.

Démonstration 3.10 *D'après le théorème d'inversion locale f est un difféomorphisme local de classe C^r.*

Ceci implique en particulier que $V = f(U)$ est voisinage de tout ses points, donc un ouvert de F.

l'hypothjèse d'injectivité de f c-à-d la bijectivité de $f : U \longrightarrow f(U)$, permet de définir un inverse f^{-1}.

Comme localement, l'inverse de f coïcident avec f^{-1}, f^{-1} est alors de classe C^r.

Donc f est un difféomorphisme "global" de classe C^r. ♣

Exemple 3.3.1 (les coordonées polaires) .

Soit $\Phi : U \longrightarrow V$, définie par $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

où $U = \{(r, \theta); r \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\pi < \theta < \pi\}$ et $V = \mathbb{R} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$

Alors

1. *Φ est de classe C^∞.*
2. *Φ est injective. En effet $\Phi(r, \theta) = \Phi(r', \theta')\|\Phi(r, \theta)\| = r = r' = \Phi(r', \theta')$ d'où $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$ et donc $\theta' = \theta$. Finalement $(r, \theta) = (r', \theta')$.*
3. *pour tout $(r, \theta) \in U$, $\det J_\Phi(r, \theta) \neq 0$.*
   en effet, $J_\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc $\det J_\Phi(r, \theta) = r \neq 0$.

Le théorème d'inversion globale, nous affirme alors que Φ est difféomorphisme de classe C^∞.

On pourrait faire mieux et déterminer explicitement l'inverse de Φ.

L'inverse de Φ, $\Psi : V \longrightarrow U$ qui à $(x, y) \in U$ associe ses "coordonées polaires" $(r, \theta) \in U$ est définie par

$$\Psi(x, y) = \left(\|(x, y)\|, \arg\left(\frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}\right)\right) = \left(\|(x, y)\|, 2\arctan\left(\frac{y}{\|(x, y)\| + x}\right)\right)$$

où $\arg : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \longrightarrow]-\pi, \pi[$ est la fonction argument, inverse de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ et $\mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\| = 1\}$ le cercle unité.

En effet, pour $u = (x, y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$:

$$\arg(u) = \theta \text{ si et seulement si } u = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Remarque *:* $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y}{1+x}$, *d'où* $\theta = 2\arctan\frac{y}{1+x}$.

3.3.1 Fonctions implicites

Au lieu de résoudre en x une équation du type $y = f(x)$ comme dans le théorème d'inversion locale, on veut résoudre en y une équation implicite du type $G(x, y) = 0$. On va expliquer comment ce problème plus général (car $y = f(x) \Leftrightarrow G(x, y) = f(x) - y = 0$) se ramène au précédent.

Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \longrightarrow F$ une application de classe C^1. On note x la variable dans U et y la variable dans V. Pour $(a, b) \in U \times V$, on note $D_y f(a, b)$ la différentielle en b de l'application composée $\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & u \times V & \longrightarrow & F \\ y & \mapsto & (a, y) & \mapsto & f(a, y) \end{array}$ et de même on definit $D_x f(a, b)$ la différentielle par rapport à x.

On notera que $D_y f(a, b) \in \mathcal{L}(E_2, F)$ et $D_x f(a, b) \in \mathcal{L}(E_1, F)$.

Théorème 3.11 (Théorème des fonctions implicites) *Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \longrightarrow F$ une application de classe C^1.*

Soit $(a, b) \in U \times V$ tel que $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b) \in Isom(E_2, F)$.

Alors, il existe un voisinage ouvert de a, $U_a \subset U$, un voisinage ouvert de b, $V_b \subset V$ et une application de classe C^1, $\varphi : U_a \longrightarrow V_b$ tels que

1. *$\varphi(a) = b$*
2. *$\forall (x, y) \in U_a \times V_b$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$*
3. *La différentielle de φ en a est donnée par la formule*

$$D\varphi(a) = -\left(D_y f(a, b)\right)^{-1} \circ D_x f(a, b).$$

Si f est de classe C^r, $r \geq 1$, il en est de même pour φ.

Démonstration 3.12 *Soit $g : U \times V \longrightarrow U \times F$ définie par $g(x, y) = (x, f(x, y))$.*

La différentielle de g en (a, b) est l'application $Dg(a, b) : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \times F$ definie par $Dg(a, b)(h, k) = (h, D_x f(a, b)h + D_y f(a, b)k)$

$Dg(a, b)$ est inversible. En effet, pour tout $(H, K) \in E_1 \times F$, l'équation $Dg(a, b)(h, k) = (H, K)$ a pour solution unique

$$(h, k) = \left(H, \left(D_y f(a, b)\right)^{-1} \left(K - D_x f(a, b)H\right)\right).$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert voisinage de (a, b), $W_{a,b} \subset U \times V$ tel que

$$\begin{array}{cccc} g|_{W_{a,b}} : & W_{a,b} & \longrightarrow & g(W_{a,b}) \\ & (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)) \end{array}$$

est un difféomorphisme de classe C^1.

L'inverse de g est alors de la forme $g^{-1}(x,y) = (x, \phi(x,y))$.

On peut, quitte à restreindre l'ouvert $g(W_{a,b})$, supposer que $g(W_{a,b}) = B((a,b), r)$ pour un certain $r > 0$.

On a les équivalences :

$(x,y) \in W_{a,b}$ *et* $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) \in B((a,0), r)$ *et* $y = \phi(x,0)$. $\Leftrightarrow$ $\|x-a\| < r$ *et* $y = \varphi(x)$*, où on a posé* $\phi(x,0) = \varphi(x)$.

Comme $w_{a,b}$ est un ouvert voisinage de (a,b), il existe un voisinage ouvert de a, U_a et un voisinage ouvert de b, V_b telle que $U_a \times V_b \subset W_{a,b}$. Comme φ est continue, quitte à restreindre U_a, on peut supposer que $\varphi(U_a) \subset V_b$.

Finallement, $\varphi : U_a \longrightarrow V_b$ vérifie bien $\varphi(a) = b$ et $\forall (x,y) \in U_a \times V_b$, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

On obtient la formule de la différentielle de φ en a, en dérivant la fonction identiquement nulle $f(x, \varphi(x))$ comme fonction composée. La dérivation des fonctions composée nous donne $0 = D_x f(a,b) + D_y f(a,b) \circ D\varphi(a)$..♣

Exemple 3.3.2 (écriture en dimension finie) $E_1 = \mathbb{R}^n$, $E_2 = F = \mathbb{R}^p$.

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ . \\ . \\ . \\ f_p(x,y) \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne de f au point $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est la matrice

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}$$

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites dès que le déterminant du mineur $p \times p$, $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}$ *est non nul.*

Alors il existe des voisinage ouvert U_a de a et V_b de b et une application ϕ : $U_a \longrightarrow V_b$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x))$ telle que

1. $\phi(a) = b$
2. *pour tout $(x,y) \in U_a \times V_b$ on a*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ y_p = \phi_p(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Exemple 3.3.3 *Pour un choix convenable d'un intervalle I centré en $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $y^2x_1 + e^{2y} + x_2 = 0$ a une solution unique $y \in I$ si $x = (x_1, x_2) \in V$, un certain voisinage de $(1, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$.*

En effet, on commence par définir $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = y^2x_1 + e^{2y} + x_2$.

Alors, $f(1, -1; 0) = 0$ et $D_y f(x, y) = 2x_1y + 2e^{2y}|_{(1,-1;0)} = 2 \neq 0$ et d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, V de $(1, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application C^∞ $\phi : U \longrightarrow v$ tels que $\phi(1, -1) = 0$ et $y = \phi(x)$.

D'autre part : $D_x f(x, y) = (1, y^2)$ d'où $D\phi(1, -1) = -\left(D_y f(1, -1; 0)\right)^{-1} \circ D_x f(1, -1; 0) = -\frac{1}{2}(0, 1) = (0, -\frac{1}{2})$.