Université de Rennes 1 2011-2012
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
“Calcul Différentiel et Fonctions Holomorphes”
Feuille de TD n^{0}6 Fonctions Holomorphes

1. Intégrale curviligne et formule de Cauchy

Exercice 1.1. Calculer $\displaystyle\int_C (x+2y)\,dx+(y-2x)\,dy$ le long de l'ellipse C définie par $x=4\cos\theta$, $y=3\sin\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

Exercice 1.2. Calculer $\int_C (z^2+3z)\,dz$ le long des chemins suivants :

1. le cercle $|z|=2$ du point (2,0) au point (0,2)
2. le segment de droite joignant les points (2,0) et (0,2)
3. le contour polygonal formé par les segments de droite joignant (2,0) à (2,2) et (2,2) à (0,2)

Exercice 1.3. Si γ est l'arc de courbe $\gamma(t)=t+i(t^3-3t^2+4t-1)$ joignant les points (1,1) et (2,3), trouver la valeur de

$$\int_\gamma (12z^2-4iz)\,dz$$

Exercice 1.4. Soit $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,\pi]$. Montrer que $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right|\leq \pi e.$

Exercice 1.5. Soit $R>1$, $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.
Montrer que $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{-z}}{z^2+1}\,dz\right|\leq\frac{R\pi}{2R^2-2}.$
En déduire que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{-z}}{z^2+1}\,dz=0.$

Exercice 1.6. Montrer que $f(z)=\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}-\{0\}$ i.e. il n'y a de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}-\{0\}$.

Exercice 1.7. a) Soit γ un chemin fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que si $Ind_\gamma(a)=Ind_\gamma(b)$ alors $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=0$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$

Exercice 1.8. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. On pose $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Calculer les intégrales : $\displaystyle I = \int_\gamma \frac{dz}{z}$ et $\displaystyle J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 1.9. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert D vérifiant $\forall z \in D,\ |f(z)| < \frac{1}{1-|z|}$. Montrer que les coefficients a_n du développement en série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ vérifient

$$\forall n \geq 1,\ |a_n| < (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e \text{ et } |a_0| < 1.$$

Exercice 1.10. Soient f une fonction entière, $R, A, B, \alpha \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$|f(z)| \leq A + B|z|^\alpha$ pour tout z de module plus grand que R.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n > 0$ telle que pour tout $R > 0$ on a $|f^{(n)}(0)| \leq CR^{\alpha-n}$.
2. En déduire que f est un polynôme.

Exercice 1.11. Soit f une fonction entière non constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1.12. En évaluant $\int_C e^z\, dz$ sur le cercle unité, montrer que $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta)\, d\theta = 0$.

Exercice 1.13. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z^2}\, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
3. $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}\, dz$, où $\gamma_r(t) = re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi], r \in \mathbb{R}^+\backslash\{0, 1, 2, 3\}.)$

Exercice 1.14. Soit Ω un domaine, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $f.g \equiv 0$. Montrer que f ou bien g est identiquement nulle sur Ω.

Exercice 1.15. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω contenant 0. Montrer que :

1. Si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur $\Omega \cap D(0, 1)$.

2. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.
3. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.
4. $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$ pour n assez grand est impossible.

Exercice 1.16. Calculer $\max\limits_{|z|\leq 1} |\sin z|$ et $\max\limits_{|z|\leq 1} \dfrac{|\sin z|}{|z|}$.

2. Calcul des résidus

Exercice 2.1.

1. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans les domaines $D = D(0,1)$, $C_1 = \{1 < |z| < 3\}$ puis $C_2 = \{|z| > 3\}$.
2. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{z}{z-1}e^z$ dans les domaines $C_1 = \{|z| < 1\}$ puis $C_2 = \{|z| > 1\}$.

Exercice 2.2. Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes :
a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4-1}$ b) $g(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-i)^3}$ a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$.
Calculer les résidus correspondants.

Exercice 2.3. Déterminer les singularités isolées a des fonctions f suivantes et calculer $\mathrm{Res}(f, a)$.

1.$z \mapsto \frac{1}{z^3-z^5}$	2. $z \mapsto \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$	3. $z \mapsto \exp(z + z^{-1})$
4. $z \mapsto \frac{\sin(2z)}{(z+1)^3}$	5. $z \mapsto \cos\left(\frac{z^2+4z-1}{z-3}\right)$	6. $z \mapsto z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

Exercice 2.4. Montrer que si P est un polynôme de degré ≥ 2, la somme des résidus de $\dfrac{1}{P}$ aux zéros de P est nulle.

Exercice 2.5. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Montrer que $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, où $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ($t \in [0, \pi]$). En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Exercice 2.6. [Intégrales de fonctions trigonométriques] Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes :
a)$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\sin(t)}$.
b)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\sin^2(t)}$.
c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos(x)+\sin(x)}$ où $a > \sqrt{2}$.

(poser $z = e^{it}$).

Exercice 2.7. Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2.8. [Intégrales de fractions rationnelles sans pôle sur $\mathbb{R}$]

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, $n \geq 2$, en intégrant $\displaystyle\frac{1}{1+z^{2n}}$ sur un demi-cercle.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Exercice 2.9. [Calcul d'intégrales semi-convergentes]

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ en intégrant $f(z) = \displaystyle\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi.
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{\sin x}{x}\, dx$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^2} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx$

Exercice 2.10. [Utilisation du logarithme]

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, en intégrant $\displaystyle\frac{\ln z}{1+z^3}$, ln désignant ici la détermination du logarithme avec coupure sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer simutanément les intégrales $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$ et $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Ln} x}{1+x^4}\, dx$.

   (Intégrer cette fois $\displaystyle\frac{(\ln z)^2}{1+z^4}$.)
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$

Exercice 2.11. Soient n un entier et a un réel tels que $n > a+1 > 0$.

Calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \displaystyle\frac{x^a}{1+x^n} dx$.