Université de Rennes 1
Département de Mathématiques 2011-2012

Licence de Mathématiques
“Calcul différentiel et fonctions holomorphes”
Feuille de TD n^{0}5

1. Nombres complexes, séries entières

Exercice 1.1. Décrire (géométriquement) les sous-ensembles déterminés par :

1. $|z-i| = |z+1|$
2. $\Re e(z) = |z-2|$
3. $|z+i| + |z-1| = 2$
4. $|z-z_1| = |z-z_2|, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Exercice 1.2.

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z) = \frac{1}{z^2}$.
2. Est-ce que la limite de $\frac{z}{\bar{z}}$ existe, losque z tend vers 0 ?

Exercice 1.3. Soit a, b, c, d des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. On appelle homographie associée à (a, b, c, d) l'application $h : \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{-\frac{a}{c}\}$ définie par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer qu'une homographie envoie l'ensemble formé des droites et cercles du plan sur lui-même.

Ind : On pourra commencer par voir l'effet de l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur les équations de la forme $\alpha|z|^2 + \beta z + \gamma\bar{z} + \delta = 0$.

Exercice 1.4. Trouver le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \cos n\theta, \quad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{n^2} \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Exercice 1.5. Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le domaine maximal de convergence $(a, b \neq 0)$:

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}, \quad g(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}.$$

Exercice 1.6. Résoudre les équations :
$e^z = -3$, $\cos z = 2$, $\sin z = 2$, $\tan z = 2i$ et $\operatorname{ch} z = 1/2$.

2. Equations de Cauchy-Riemann

Exercice 2.1. La fonction $f(z) = \bar{z}$ est-elle continue ? $\mathbb{R}$-différentiable ? holomorphe ? Même question pour $g(z) = z\Re e(z)$ et $h(z) = \dfrac{z+i}{z-1}$.

Exercice 2.2. Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors elle est continue. Donner un exemple montrant que la réciproque n'est pas exacte.

Exercice 2.3. En considérant la fonction $z \mapsto e^{iz} - 1$, montrer que le théorème de Rolle n'est pas valable pour les fonctions holomorphes.

Exercice 2.4. Pour $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U} \in \mathcal{H}(U)$?

Exercice 2.5. Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un ouvert connexe Ω et si $f'(z) \neq 0$ en tout point de Ω, alors la transformation $w = f(z)$ conserve les angles.

Exercice 2.6. On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$, et que $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.
2. Déterminer les constantes a, b et c telle que la fonction $f(z) = x^2 + ay - y^2 + i(bx + cxy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.
   Calculer alors $f'(2+i)$.
3. Déterminer les constantes a et b telle que la fonction $f(z) = \cos(x)\,(2\cosh(y) + a\sinh(y)) + i\sin(x)\,(2\cosh(y) + b\sinh(y))$ soit holomorphe. Quelle est alors l'expression de f en fonction de z?

Exercice 2.7. Montrer que la fonction $f(z) = \begin{cases} exp(-\frac{1}{z^4}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout points de $\mathbb{C}$, mais n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable à l'origine.

Exercice 2.8. Si $z = x + iy$ avec x et y réels, montrer que l'on a

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

En déduire les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.9. Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine (non vide), Ω de $\mathbb{C}$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est constante.
2. $\Re e(f)$ est constante.
3. $\Im m(f)$ est constante.
4. $\overline{f}$ est holomorphe.
5. $|f|$ est constante.
6. il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ telles que $a\Re e(f) + b\Im m(f) = c$

Exercice 2.10. Soient W un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur W. On pose $W^* = \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \in W\}$.
Montrer que la fonction g de W^* dans $\mathbb{C}$, définie par $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est une fonction holomorphe dans W^*.

Exercice 2.11. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine W de $\mathbb{C}$. Montrer que $\Delta(|f|^2) = 4|f'(z)|^2$.

Exercice 2.12. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ s'écrivent en coordonnées polaires $\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{i}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0$.

Exercice 2.13. On dit que deux fonctions réelles u et v sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont de classe C^2 et conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques i.e. $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et $\Delta v = 0$.
2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :
   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$
   (b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
   (c) $v(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x + iy |\ y = 0, x \leq 0\}$
   (d) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x + iy |\ y = 0, x \leq 0\}$

Exercice 2.14. Montrer les inégalités suivantes, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$|\exp(z) - 1| \leq \exp(|z|) - 1 \leq |z| \exp(|z|)$

Exercice 2.15. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On définit $a^b := exp(b\, l(a))$, où l est une déterminantion du logarithme dans un domaine contenant a.

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de i^i.
2. En prenant la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, comparer les modules des nombres complexes $(i(i-1))^i$ et $i^i(i-1)^i$.